

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

56e jaargang
1980/1981
no. 6
februari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 27,—; contributie zonder Euclides *f* 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9", 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-71 09 65.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 37,60. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 21,90. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 6,20 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, 2404 HA Alphen a/d Rijn
Postbus 371, 2400 HA Alphen a/d Rijn
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014

Hoeken, een steen des aanstoots

(voordracht voor de gemeenschappelijke studiedag van de VVWL en de NVWL op 22 maart 1980)

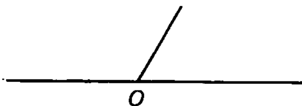
JOOP VAN DORMOLEN

0

De titel van deze voordracht is gekozen naar aanleiding van een ervaring die ik had en waarover ik u zodadelijk zal vertellen. Die ervaring had iets te maken met hoeken, zoals u zult begrijpen. Het is echter niet mijn bedoeling om in het bijzonder over hoeken uit te wijden. Ik wil het begrip hoek gebruiken om te komen tot een *analyse van aspecten* van wiskunde, die naar mijn mening in het wiskunde-onderwijs aandacht verdienen.
Het praten over hoeken is dus eerder een voorwendsel dan doel. Maar het is een goed voorwendsel, want er zitten vele aspecten aan het hoekbegrip, die gemakkelijk generaliseerbaar zijn. Daarom zijn hoeken een geschikte steen des aanstoots, óok in positieve zin: door je er aan te stoten kom je op het spoor van belangrijke wiskundige aspecten.
Er zijn natuurlijk verschillende analyses mogelijk. Ik heb er een gekozen, die me bevalt en wel hierom, omdat er belangrijke aanwijzingen uit voortkomen voor het didactisch handelen van leraren. Jammer genoeg zal ik, gezien de tijd die me ter beschikking staat, niet systematisch over dat didactisch handelen zelf kunnen praten.

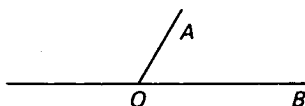
1

Ik ga nu beginnen met de ervaring waarover ik sprak.
Ik maakte een les mee, gegeven door een van mijn studentes, laat ik haar Annemarie noemen, die vanwege haar studie bij ons aan de Rijksuniversiteit van Utrecht moest werken aan de voorbereiding op haar leraarschap. Aan het begin van haar les wilde zij controleren of de leerlingen de essentialia van de vorige les overgehouden hadden. Het ging daarbij over de notatie van hoeken Zij had daarbij het volgende plaatje op het bord getekend en ze vroeg een van de leerlingen of die wist welke hoek ze bedoelde als ze zei: 'Hoek *O*'.

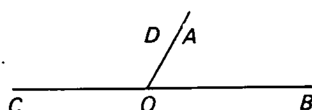


De leerling zei heel gehoorzaam nee en toen vroeg Annemarie hoe ze ondubbelzinnig de hoek zou kunnen aangeven, die ze aanwees. Ze wees daarbij met haar

wijsvinger naar het binnengebied van de rechterhoek. De leerling zei dat er dan letters bij zouden moeten staan.
Annemarie: 'Kom dat dan maar doen.'
De leerling kwam naar het bord en schreef:

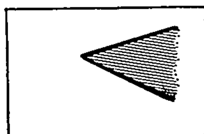


Annemarie: 'Hoe noem je nu die hoek?'
Leerling: 'Hoek *OAB*'.
Annemarie: 'Zo hebben we dat niet afgesproken. We hebben afgesproken dat je bij een been begint (ze wees een punt bij *A* aan) dan naar het hoekpunt *O* gaat (ze bewoog haar vinger over de lijn naar *O*) en dan naar het andere been (ze bewoog haar vinger langs de lijn naar *B*). Je gaat dus van *A*, via *O* naar *B* (ze herhaalde haar beweging) en je zegt dus: Hoek *AOB*.'
Leerling: 'O, ja!'
Annemarie: 'En als je nu juist die andere hoek zou bedoelen?'
Leerling: 'Dan moet je er weer letters bij schrijven'
Hij schreef op het bord:

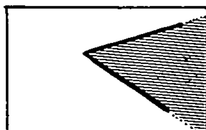


Leerling: 'Dat is hoek *COD*'.
Ik breek de discussie hier af. Het gaat er nu niet om wat Annemarie verder nog deed. Ook niet wat ze beter gedaan zou kunnen hebben. Ik wil proberen te analyseren wat er met de leerling aan de hand had kunnen zijn.

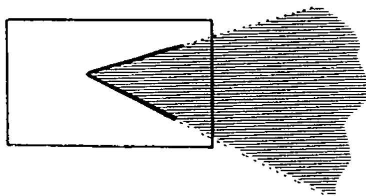
2
Ik constateer dat Annemarie het binnengebied van de hoek aanwees terwijl ze sprak over 'die hoek'. Ik constateer dat Annemarie later met haar vinger langs de benen van de hoek ging en daarbij sprak over 'hoek *APB*'. Ik heb de leerling geen beweging zien maken, die er op zou kunnen duiden dat hij een hoek aanwees. Ik weet niet wat voor hoekbegrip de leerling had:



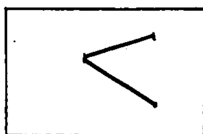
(A1) Is het een taartpunt, uit het bord geknipt. zover als de getekende strepen (die de benen van de hoek moeten voorstellen) gaan?



(A2) Is het een taartpunt, uit het bord geknipt, waarbij de getekende strepen in gedachten tot de rand van het bord verlengd moeten worden?

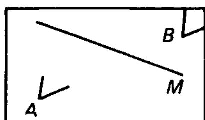


(A3) Is het een taartpunt, uit het oneindig ver uitgestrekt gedachte vlak geknipt?



(B1) Is het een figuur bestaande uit twee lijnstukken met één gemeenschappelijk eindpunt?
(B2) Is het een figuur bestaande uit twee (oneindig ver uitgestrekte gedachte) halfrechten met gemeenschappelijk eindpunt?
De mogelijkheid dat het een figuur is bestaande uit twee lijnstukken, die in gedachten tot de rand van het bord lopen, laat ik buiten beschouwing. Die mogelijkheid ben ik nog nooit tegengekomen en ik wil nu alleen praten over waarschijnlijke concepten, niet over mogelijke. Ik zal straks nog een mogelijk hoekconcept noemen, dat ook waarschijnlijk is.
Ik wil hierbij nog aantekenen, dat een combinatie van een van de taartpunt-concepten met een van de lijn-concepten ook tot de waarschijnlijkheden behoort.
Misschien zult u zeggen, dat (A1) vanzelf al (B1) inhoudt en dat het concept (A3) ook (B2) bevat, maar zo eenvoudig ligt de zaak niet: we moeten geen formele logica bedrijven als we begripsinhouden gaan analyseren van een mens. Het lijnstuk-concept (B1) is als zodanig niet een deel van het taartpunt-concept (A1). De twee concepten zijn verschillend en, dat is belangrijk, ze kunnen tegelijkertijd bestaan. Afhankelijk van de context schakelt iemand het ene, dan wel het andere concept in.
Het klassieke voorbeeld is het volgende: De familie zit aan tafel om met het avondeten te beginnen. Alleen vader is er nog niet. De kinderen vragen waar hij is. Moeder zegt: 'Vader zit nog op de bank'.

Nu kan het zijn, dat hij in de huiskamer op zijn geliefdkoosde plekje zit te kijken naar een ijshockeywedstrijd op de televisie. Het kan ook zijn, dat hij aan het overwerken is, want het was de laatste tijd erg druk op de bank.
Afhankelijk van de context schakelt iedereen zijn denkschema naar aanleiding van het woord 'bank' in.
Zo kan het ook met het woord 'hoek':



Ik heb het meegemaakt, dat een leerling de hoek, die ik hier met de letter *A* aangeef, groter vond zijn, dan de hoek, die met *B* is aangeduid. Dat lijkt op het tweede taartpunt-concept.
Toen ik die leerling vroeg waar de lijn *m* de hoek *A* snijdt, antwoordde hij: 'Dan moet je de benen doortrekken en dan krijg je de snijpunten.'
Hij gaf niet een lijnstuk als doorsnede. Dat zou hij hebben moeten doen als hij consequent één concept, n.l. het taartpunt-concept zou hanteren. Schijnbaar schakelde hij, bij de andere context van het ene concept over naar het andere. (De eerste context was zoiets als: Wat ís een hoek?, de tweede context: Wat kan je met hoeken voor tekeningen maken?)

3
Binnen de wiskundige context waar wij met onze leerlingen bezig zijn, is het niet goed dat er verschillende concepten bij een woord als 'hoek' bestaan. Daardoor zou het hoek-begrip niet operationeel zijn en waarvoor zouden we het dan onderwijzen? Er moet dus een goede theoretische basis zijn. Het begrip moet passen in een zekere structuur. Het concept hoek heeft dus een *theoretisch-structureel* aspect.

4
Dat betekent niet noodzakelijkerwijs dat er ook een ondubbelzinnige definitie voor gekend moet worden. Er zijn begrippen in de wiskunde, die we niet voor onze leerlingen definiëren en die deze toch op de door ons gewenste manier schijnen te kennen. Het gaat hier dan vooral om elementaire begrippen zoals punt, getal, lijn, vlak, driehoek.
Nu zult u misschien zeggen, dat het soort verwarringen zoals ik die schetste, ontstaan zijn juist doordat er geen duidelijke afspraken waren gemaakt. Dus had je eerst een definitie moeten geven. Met de reden die u dan opgeeft ben ik het eens: je moet duidelijk afspreken wat er bedoeld wordt. Met de conclusie ben ik het maar half eens: een definitie is geen duidelijke afspraak voor iemand die niet geoefend is in het hanteren van definities. Voor zo iemand is meer nodig en als dat meerdere niet gebeurt, dan is een definitie een stel klanken, die hij syntactisch wel kan onthouden, maar waaraan voor hem de semantiek ontbreekt. De zelfdiscipline om alleen op de definitie af te gaan moet een leerling van het secundair onderwijs nog leren. Ik wil hierbij spreken van het *logische aspect*

van de wiskunde. Het is niet zo gemakkelijk om dat te onderwijzen. Het eist veel tijd en geduld. Het is lange-termijn werk en kan zeker niet in een paar maanden in een hoofdstuk geleerd worden.

5

Nu moet ik goed oppassen, dat u míjn concepten, namelijk de door mij bedoelde aspecten van wiskunde, goed van mij overneemt. Ik bedoel met het logisch aspect niet de definitie zelf, maar de houding en de vaardigheid van het logisch kunnen interpreteren van die definitie, teneinde het concept te verhelderen. De definitie zelf is een rijtje woorden. Het is een bepaalde vorm van coderen van mijn concept. Beter gezegd: van het concept dat ík graag wil dat anderen van mij overnemen.
Ik heb nog meer vormen van coderen tot mijn beschikking: plaatjes, formules, lichaamsbewegingen, handelingen, stemverheffing of juist verzachting van de stem.
Het kennen en begrijpen en het zelf gebruiken van dat soort codes is ook een aspect van de wiskunde. Ik noem het het *communicatieve aspect*. We zien dat in Annemarie's probleem: zij gebruikt verschillende codes om de hoek aan te geven waarvan zij een theoretisch concept heeft en waarvan ze graag zou willen dat haar leerlingen dat ook hadden. Zij prikt haar vinger op een plaats in wat we het binnengebied zouden noemen en zegt daarbij: 'Deze hoek'. Deze combinatie van wijzen en woorden spreken is een bepaalde code.
Kennen de leerlingen haar code? Weten haar leerlingen dat zij het halvelijnen-concept (B2) heeft als zij die code gebruikt? Of zouden ze er aan gewend zijn dat die code ergens anders staat, namelijk het aanwijzen van een vlakdeel en zou het regelmatig gebruik van die code door Annemarie kunnen veroorzaken dat sommige van haar leerlingen een van de taartpunten-concepten hebben? (Ik neem nu maar aan dat Annemarie het lijnstuk-concept had.)
Annemarie gebruikte later een *andere* code: zij zette haar vinger op een punt van een been dicht bij de letter A, bewoog hem tot O en ging daarna over het andere been tot ze in de buurt van letter B was.
Is dat een bruikbare code? Of zouden de leerlingen die code op een niet bedoelde manier kennen en er het lijnstuk-concept (B1) uit interpreteren?
Zelf gebruikte ik dikwijls een andere code: ik zette beide wijsvingers bij het hoekpunt en liet dan elke vinger met een versnelde beweging langs elk van de benen glijden. Die versnelling was ook een code: ik wilde ermee te kennen geven dat de benen niet ophouden, ze gaan oneindig door al kan ik er niet bij. (Ik moet wel zeggen dat dat een toevalstreffer was. Ik had het niet bewust bedacht op basis van overwegingen zoals de voorgaande.)

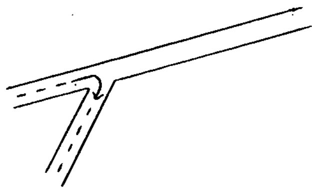
6

Daarmee kom ik op een nog andere code. Die heeft evenwel niet ten doel het concept over te brengen, maar om ondubbelzinnig over te brengen wélke hoek er bedoeld wordt. Niet die linkse, maar die rechtse, dat is dus hoek AOB.
De leerling verzon zijn eigen code, volkomen legitiem: hoek OAB. En begrijpelijk ook. Hij had geleerd om een hoek aan te geven met de letter bij het hoekpunt. Dat is primair, de andere letters zijn secundair. Jammer dat zijn creatie

niet aanvaardbaar was. Je kunt nu eenmaal niet allemaal je eigen code gebruiken. Je moet een universele code afspreken. (Hier is tussen twee haakjes een ander conceptueel aspect: je moet goede afspraken maken, want anders kun je elkaar – en jezelf – niet begrijpen. Niet: je moet de afspraak van de leraar gebruiken, want anders wordt het fout gerekend.)
Ik merk op dat hier ook een *creatief* aspect naar buiten treedt: iemand verzint iets wat nieuw voor hem/haar zelf is. Dat gebeurde ook toen de leerling *C* en *D* bij de benen van de andere hoek schreef. Of creativiteit aangemoedigd wordt hangt ervan af hoe je als leraar op zulke creatieve momenten reageert. Ook als ze op een bepaald moment niet bruikbaar zijn, zoals bij hoek *OAB* behoeven ze niet botweg afgewezen te worden.

7
Ik kom nog even terug op het codewoord *hoek*. Ik merk op dat daarmee soms een concept aangegeven wordt: 'Een hoek is ...' en andere keren verwezen wordt naar bepaalde voorbeelden, specificaties, concretiseringen van dat concept: 'niet die linkse hoek, maar die rechtse hoek, namelijk hoek *AOB*'. Ook hier is een code, die we van elkaar moeten kennen. Nu is dat niets nieuws gelukkig. Het komt al in onze prilste jeugd voor: 'Waar is het poesje?' (code verwijst naar concreet geval) en 'Wat zegt het poesje?' (code verwijst naar concept) zegt moeder als ze een prentenboek met haar kind bekijkt.
Ik denk dat daar niet zoveel problemen uit voortkomen, maar je moet het als leraar wel weten om op je woorden te kunnen letten. Zo las ik ergens: 'Een hoek is 60°. Op het ene been ligt een punt *A*. Op het andere been ligt het punt *B* zodanig dat ...'. De rest doet er niet toe. Reactie van een van mijn leerlingen: 'Meneer, een hoek kan toch ook wel eens andere graden zijn?' We vonden snel wat de schrijver bedoelde: niet het concept, maar één bepaalde concretisering ervan. Deze leerling leerde iets goeds van gedachtenloze formulering. Maar dat kwam omdat hij zich het probleem bewust was. Hoe zat dat met de andere leerlingen? Toch maar op je woorden passen.

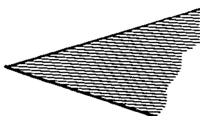
Ik wil nog een ander hoekconcept bespreken. In het spraakgebruik speelt het concept hoek nog een andere rol. Het kan nauw verband houden met het concept draai. Een goed voorbeeld daarvan is een kranteberichte naar aanleiding van de vliegramp op Teneriffe toen een startend Nederlands vliegtuig in botsing kwam met een zojuist geland Amerikaans toestel dat de startbaan nog niet verlaten had. In één krant stond toen (ik citeer niet woordelijk) 'De gezagvoerder van het Amerikaanse vliegtuig moest, om van de startbaan op de parkeerbaan te komen, zijn toestel een scherpe hoek van 135° laten maken'.



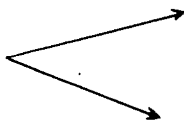
Het boeiende aan dit bericht (afgezien van de akelige omstandigheden waaruit het is ontstaan) is, dat iedereen schijnt te begrijpen wat er aan de hand was. Blijkbaar zijn hier door elkaar gehaald:
- de hoek die de gezichtsrichtingen van de piloot vóór en na de draai maakten: 135° en
- de hoek die de wegen met elkaar maakten.

Ik denk dat ik ook begrijp waar dit uit voortkomt: gewoonlijk zijn de hoeken die we maken recht. Als we rechts afslaan dan maakt onze gezichtsrichting een rechte draai, terwijl ook de wegen hier een rechte hoek maken. We zijn ons er niet van bewust dat de hoeken wel even groot zijn maar niet dezelfde. Vandaar dat iemand met enig recht over een scherpe hoek van 135° kan schrijven.

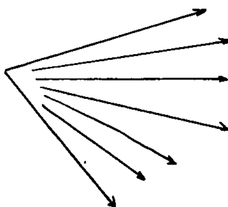
De leraar die deze dingen weet zal er in de conceptvorming, zoals hij die wil, rekening mee houden.
Om nog eens samen te vatten: hij weet dat er op zijn minst drie concepten over hoek bij de leerlingen aanwezig zijn:
- de hoek als taartpunt, al dan niet uitgestrekt tot de rand van het papier of tot in het oneindige



- de hoek als figuur bestaande uit lijnstukken of halve lijnen



- de hoek als draairichting van onze gezichtsrichting.



Hij moet er een geschikt theoretisch *concept* uitzoeken en dat vastleggen met allerlei codes, zoals plaatjes, bewegingen, nederlandse zinnen. Bij dat laatste kan hij de gelegenheid te baat nemen om een *logisch* aspect in de wiskunde te halen: hij kan definities geven; maar dan ook consistent verder redeneren: de definitie moet operationeel zijn.
Er is nog veel meer over hoeken te zeggen, maar de tijd schiet daarvoor te kort.

Daarom geef ik de problemen alleen maar aan, zonder al te veel op mogelijke oplossingen in te gaan.
Wat dacht u van het concept 'gelijke hoeken' en 'groter' en 'kleiner'? Vanuit de halfrechten definitie (B2) kan ik nog wel aangeven wat gelijke hoeken zijn: dat zijn hoeken die op elkaar passen (weer een logisch aspect, dat naar voren gehaald kan worden), maar hoe zeg ik met de halfrechte definitie wat groter en kleiner is? Is het niet veel eenvoudiger om 'groter' en 'kleiner' aan te duiden met een van de andere definities? En dan zouden we het ook nog moeten hebben over het meten van hoeken. Waarom moet dat altijd met graden? Waarom niet veel voor de handliggender met de centimeter? Kunnen we niet veel meer het creatieve, het communicatieve en het logische aspect van de wiskunde benadrukken als we onze leerlingen zouden vragen een hoek met een lineaal te meten, de maat dan aan iemand anders door te geven en te kijken of die met die maat een even grote hoek maakt?
En als het dan toch met graden gebeuren gaat, hoe overwinnen we de moeilijkheid van de verstrengeling van het concept booggraad met het concept hoekgraad. Want met een gradenboog meten we geen hoeken, maar bogen.
Zo kan ik nog wel een poosje doorgaan met mijn problemen die misschien ook wel de uwe zijn.

8
Ik wil tot besluit nog een paar belangrijke aspecten noemen die tot nu toe niet zo erg aan bod geweest zijn: het *algoritmische* aspect en het *methodische* aspect.
Tot het algoritmische aspect wil ik rekenen het vaardig kunnen uitvoeren van standaarden zoals constructies (van een hoek), hanteren van instrumenten (de gradenboog), oplosmethoden die volgens een vast patroon moeten gebeuren. Maar ook het zelf maken van standaarden. Daar zit dan een verband met de andere aspecten. Een ervan heb ik nog niet genoemd: het *methodische* aspect. Dat lijkt erg op het algoritmische, waar het gaat om het uitvoeren of bedenken van routinehandelingen.
Het methodische aspect benadrukt het bedenken en uitvoeren van handelingen die niet zonder meer uit het probleem volgen. Het komt vooral te voorschijn bij het oplossen van problemen die men nog niet eerder is tegengekomen. Zo bijvoorbeeld bij het meten van een hoek met een gradenboog. Dat is pas na enige oefening een algoritmische handeling. Maar voor het zover is moet men goed bedenken op welke van de beide schaalverdelingen men moet aflezen en waarom.

Tenslotte is er nog een *practisch aspect*: waar is het goed voor bij het oplossen van niet-wiskundige problemen?

9
Ik vat nog een keer samen:
ASPECTEN VAN WISKUNDE
- *theoretisch-structureel*
  - bijv.:weten wat een hoek is
    :meten van een hoek

- *logisch*
  - bijv.:uit de definitie van een hoek conclusies kunnen trekken
    :'immers'
    :'daaruit volgt'
    :'omgekeerd'
- *communicatief*
  - bijv.:verschillende coderingen van een concept kennen en kunnen gebruiken
    :een codering kunnen gebruiken om bepaalde specificaties aan te geven
- *algoritmisch*
  - bijv.:een code ondubbelzinnig vaardig hanteren
    :een ondubbelzinnige code bedenken (uit het arsenaal van kennis)
    :meten van hoeken
- *methodisch*
  - bijv.:bedenken en beslissen welke code in een bepaalde context het meest adequaat is
- *creatief*
  - bijv.:een ondubbelzinnige code bedenken (nieuw)
    :een elegante code bedenken
- *praktisch*
  - bijv.:de steilte van een helling aangeven

10

Het nut van een dergelijke analyse is naar mijn mening de duidelijkheid die men krijgt over enerzijds de gecompliceerdheid van sommige wiskundige begrippen (en daarvan is 'hoek' een uitstekend voorbeeld) en anderzijds over de samenhang tussen de verschillende aspecten. Er komt erg duidelijk uit hoe groot het gevaar is van het benadrukken van één aspect: veel oefenen benadrukt het algoritmische aspect, maar geeft geen garantie dat de andere aspecten tot ontwikkeling komen.
Een grote nadruk op de creativiteit zou wel eens kunnen veroorzaken dat het blijft bij het maken van mooie plaatjes, terwijl contact met de andere aspecten ook vraagt om een ander soort creativiteit, die ik gemakshalve maar intellectuele creativiteit noem. Eenzijdige nadruk op het logische aspect garandeert niet dat de concepten overgenomen worden.
Zo kan ik nog wel uren doorgaan.
Ik heb al gezegd aan het begin dat ik het wilde hebben over een analyse van het hoekbegrip waaruit didactisch handelen kan worden afgeleid. Ik heb weinig over dat didactisch handelen zelf gesproken. Dat is weer een ander verhaal.
Ik heb de hoek als een steen des aanstoots gebruikt, niet omdat ik vind dat ze uitgebannen moet worden, maar omdat ik daaraan goed zou kunnen laten zien wat belangrijke aspecten in de wiskunde zijn. In plaats van steen des aanstoots zou ik het dan ook beter een slijpsteen hebben kunnen noemen.

Korrel

Routine en subroutine

Onlangs was ik er getuige van, dat een moeder haar dochter, leerling van de derde klasse van een lagere school in Zwitserland, hielp bij het huiswerk rekenen. Lange series sommen werden gemaakt van het type 240 + 500, 380 + 200, 610 + 300, ... Daarna volgden 740 – 400, 390 – 200, 860 – 600, ... Het ging voortreffelijk. Toen kwam heel simpel 160 – 100. En daar ging het mis; het antwoord werd pas na grote moeite gevonden.
De oorzaak is duidelijk. De opzet was door deze opgaven de leerling een bepaalde routine bij te brengen. De leerling rekende echter alleen maar uit: 2 + 5, 3 + 2, 6 + 3, ..., 7 – 4, 3 – 2, 8 – 6, ... en beperkte zich dus tot het uitvoeren van een subroutine die allang beheerst werd. Bij 160 – 100 bleek het beheersen van de subroutine ontoereikend.
Moraal: door de leerling de gelegenheid te geven een subroutine uit te voeren die hij allang beheerst, kan tijd verknoeid worden.

Een mooi overeenkomstig voorbeeld uit de praktijk van het voortgezet onderwijs is het trainen van $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.
Lange series opgaven worden gemaakt van het type $a^3 \cdot a^4 = a^7$ en bij $a^5 \cdot a$ gaat het dan uiteraard mis. De leerling heeft zich beperkt tot het machinaal uitvoeren van de subroutine $3 + 4 = 7$ en loopt nu vast. Dat is gauw verholpen. Zet voor a maar a^1 en nu functioneert de subroutine weer prima. Tijd wordt slecht besteed en het is maar zeer de vraag of de leerling na enige tijd, als hij bijv. $3^3 \cdot 3^8$ moet herleiden, enig voordeel blijkt gehad te hebben van de lange rij sommen van de soort $a^3 \cdot a^4 = a^7$ die hij gemaakt heeft.
Wat dan wel? De remedie ligt voor de hand. Laat de leerling eens met zijn eigen woorden vertellen waarom $a^3 \cdot a^4 = a^7$ is. Dan kan hij ook zelf vinden dat $a^5 \cdot a = a^6$ en dan zonder de merkwaardige kunstgreep toe te passen a door a^1 te vervangen. En verder: laat hem series eenvoudige vraagstukken maken, zoals: $a^3 \cdot a^2$; $(a^3)^2$; $3a^2 \cdot 2a^3$; $(2a^2)^3$; $3(a^2)^2$; $3a^2 + 2a^2$; $a(a^3 + a^2)$; $2a^3 + 3a^2$ (kan niet herleid worden); $a^3 + a^3$; $2(a^3 + 1)$; $a^2 - a^2$; $a^2(a^3 + a^3)$; $a^2(a^3 - a^3)$.
Natuurlijk is daaraan voorafgaand training van de afzonderlijke types nodig, omdat het anders voor de leerling te moeilijk wordt. Maar laat deze training niet verzanden in het klakkeloos uitvoeren van een subroutine. Probeer de leerling wakker te houden. Zodra bij $a^3 \cdot a^4$ de subroutine dreigt, moet $a^5 \cdot a$ opduiken. En daarna als weer subroutine dreigt bijv. $a^5 \cdot 2a^2$ of $a \cdot \ldots = a^4$.
En veel liever eenvoudige opgaven met verplichting hersens te gebruiken dan monsters zoals $(2a^2b^4)^3(4a^3b^5)^2$.

P. G. J. Vredenduin

Uit buitenlandse tijdschriften

Het Franse Bulletin

1 Het *Bulletin* van de APMEP, de 'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public' bevat ieder jaar opnieuw zo'n rijkdom aan informatie over wiskundige en didactische problemen die in de belangstelling staan van onze Franse collega's, dat het mij verantwoord lijkt daarvoor in *Euclides* enige belangstelling bij de Nederlandse wiskundeleraren te verwachten.
De APMEP kwam tot stand in 1910, in het eerste kwartaal van deze eeuw waarin in diverse westeuropese landen een opleving van de belangstelling voor didactische problematiek viel te constateren. Ze kwam dus wat eerder tot stand dan WIMECOS hier te lande. Dat nu in 1980 het *Bulletin* toch nog pas zijn 59ste jaargang beleeft wordt beter begrijpelijk, als we rekening houden met de ernstige storingen, met de ontreddering die in de jaren van de eerste en van de tweede wereldoorlog het verenigingsleven hebben doen stilleggen.
De ondertitel van het *Bulletin*, 'de la maternelle à l'université' is reeds een indicatie voor de buitengewone gevarieerdheid die het Franse tijdschrift kenmerkt. Er wordt duidelijk naar gestreefd, dat iedere docent in de wiskunde, onverschillig op welk niveau hij zijn onderwijs ook moge geven, in ieder nummer van het *Bulletin* informatie aantreft die ook voor hem van belang is.
Om voor Nederlandse docenten duidelijk te maken wat er allemaal in het *Bulletin* te vinden is, is het niet doenlijk de inhoud van enige jaargang gedetailleerd te bespreken. We zullen daarom volstaan met het signaleren van een serie rubrieken, waarvan de meeste in elk nummer van het Franse tijdschrift aan de orde worden gesteld.

2 De voltooide 58ste jaargang (1979) bestond uit 5 afleveringen die gezamenlijk 874 bladzijden telden, met nog een vijftal supplementen (679 bladzijden), die ons volledig inlichten over het Baccalauréat in al zijn schakeringen. De opvolgende nummers worden doorgaans ingeleid door een *Editorial*, in de regel van de hand van de presidente, Christiane Zehren. De rubriek *Etudes* bevat bijdragen waarin de klemtoon valt op de wetenschappelijke inhoud, bij de *Etudes didactiques* komen uiteraard de presentatie van de leerstof in de klas en de gekozen werkvormen op de voorgrond te staan.
Onder de titel *Dans nos classes* worden o.a. doelstellingen van het Franse

wiskunde-onderwijs onder de loep genomen.
De rubriek *Evaluation* bevat beschouwingen over de jongste resultaten van de 'docimologie', met bijzondere aandacht voor traditionele methoden die karakteristiek geweest zijn bij de controle van het leerproces en van de selectie van de leerlingen.
In de rubriek *Manuels scolaires* wordt de evolutie die er in de structuur van onze schoolboeken valt te constateren, uitvoerig besproken. Kuntzmann constateert in dit verband: 'L'enseignement d'aujourd'hui ne peut pas s'étudier sans référence à celui d'hier, entre autres parce que chaque enseignant a son propre passé'.
De rubriek *Interdisciplinarité* bevat o.a. een artikel overgenomen uit het Bulletin de l'Union des Physiciens, getiteld 'Les raisonnements naturels en cinématique élémentaire'.
De afdeling Matériaux pour une documentation, onder redactie van Walusinski, een Franse collega die al decennia lang de APMEP in allerlei geledingen heeft gediend, brengt een zeer gevarieerde categorie onderwijsproblemen onder de aandacht van de lezers. Als voorbeelden noemen we: *La mathématique comme oeuvre d'art*, *Une année dans les sciences*, naast een bespreking van een Engelse 'dictionnaire encyclopédique de mathématiques', en van levensbeschrijvingen van Jean Itard (1901-1979) en van onze Belgische collega Willy Servais (1913-1979). School- en studieboeken worden er gerubriceerd in de afdelingen: manuels, pédagogie générale, pédagogie pour la mathématique, culture générale, formation permanente des enseignants, terwijl ook de sterrenkunde in deze rubriek af en toe aan de orde komt.
Van betekenis is voorts de afdeling *Dictionnaire*, waarvoor in de loop van de jaren een indrukwekkende verzameling uitvoerig gedocumenteerde fiches bijeengebracht werd.
Algemene titels als *Tribune libre*, *Vie de l'Association*, *Courrier des lecteurs*, *Examens et Concours* geven zonder nadere toelichting hun strekking reeds voldoende weer.

3 Voor een abonnement op het Bulletin kan men zich wenden tot het secretariaat van de APMEP, 37 rue Jacob, 75006 Paris, en voor kennismaking ermee via onze Leesportefeuille tot de verzorger A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, Elst, Gld.

Joh. H. Wansink

Continuïteit en Limiet, Stijgen en Dalen in Getal en Ruimte

S. H. CHENG, PH. D.

1.1 Inleiding

Getal en Ruimte is een bekende serie leerboeken voor wiskunde. Ze bevatten veel opgaven en voorbeelden die goed voorbereiden op het eindexamen. De didactische aanpak is over het algemeen prettig: eerst voorbeelden en dan theorie, zonder dat er al te veel doekjes om worden gewonden.
Toch vind ik het moeilijk om uit deze boeken les te geven, in het bijzonder in de bovenbouw van het vwo en soms ook het havo. De problemen zitten voor een deel bij het onderzoek van functies. Kort samengevat, de begrippen 'continuïteit' en 'stijgen' zijn verkeerd gedefinieerd: functies zijn *per definitie* niet continu in de randpunten van het definitiegebied; één soort 'stijgen' is alleen voor open intervallen gedefinieerd en voor een ander soort 'stijgen' is continuïteit deel van de definitie. Deze merkwaardige definities geven aanleiding tot problemen als ze worden aangewend. In deel 2 en in deel 3 van dit artikel zal ik dit uitvoeriger toelichten. Deel 4 is minder technisch van aard. Het geeft een aantal van mijn meningen, ervaringen en vragen over de problemen die de rammelende theorie in deze boeken oproept.

1.2 Dilemmas

Het eindexamen eist alleen maar rekenvaardigheid en het eist daar ook veel van. Theorie en bewijzen worden niet gevraagd. Toch staan er veel bewijzen in de boeken van Getal en Ruimte. Verder zou ik ook graag de leerlingen bewijzen willen laten zien en ze ermee laten oefenen. Maar behalve dat dit niet gevraagd wordt in het eindexamen, is er ook niet voldoende tijd voor. Dit is mijn eerste dilemma.
Het minste dat ik wil is de definities goed geven en een paar bewijzen laten zien. Voor mij persoonlijk ontstaat hierdoor ook een dilemma. Ofwel ik volg het boek, ofwel ik geef mijn eigen definities. In het eerste geval kan ik het niet over me verkrijgen om definities te geven en stellingen uit te leggen die niet kloppen. In het tweede geval moet ik toch de leerlingen vertellen wat er niet klopt in het boek, en wat het verschil is tussen de definities van het boek en die van mij. Dat geeft verwarring en dat kost tijd die afgaat van de tijd die nodig is voor het oefenen en herhalen van de eindexamenstof.

1.3 Plan van Getal en Ruimte

Voor de lezer die niet vertrouwd is met de opbouw van Getal en Ruimte schets

ik nu de opbouw van de stof in deze leerboeken, voorzover van belang voor de rest van het verhaal. Ik bespreek dus niet wat er in deze boeken staat over differentiaalvergelijkingen, parametervoorstellingen en statistiek.
Voor het vwo zijn er de delen 4V (voor de vierde klas) en 5/6V1 en 5/6V2 (beide voor de vijfde en zesde klasse). Deel 4V is een nogal oppervlakkige inleiding over het functiebegrip, differentiëren en integreren. Delen 5/6V1 en 5/6V2 behandelen functies en functieonderzoek uitvoerig. Achtereenvolgens komen aan de orde: continuïteit, limieten van eenvoudige functies (log, sin, exp, wortel, etc.) en hun samenstellingen alsmede van functies die je krijgt door plakken. Daarna komt alles aan de beurt wat komt kijken bij het onderzoek van deze functies. Op integreren wordt ook enigszins ingegaan.
Deel 4/5H1 is voor de vierde klas en de vijfde klas van het havo. Dit deel behandelt hetzelfde als 4V, 5/6V1 en 5/6V2, maar veel minder diepgaand. Integreren komt niet aan de orde in 4/5H1.

2. Continuïteit en Limiet

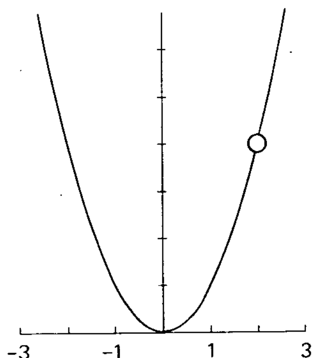
Volgens Definitie II-2 (5/6V1, p. 38) wordt continuïteit als volgt gedefinieerd:

> 'We noemen de functie f continu in $x = a$ als a een functiebeeld $f(a)$ heeft, terwijl bij iedere omgeving Y van $f(a)$ een omgeving X van a te vinden is, zo, dat $f(X) \subset Y$.'

Wanneer is f nu niet continu in a volgens het boek? Om deze vraag te beantwoorden, moeten we twee principes van het boek in het oog houden.

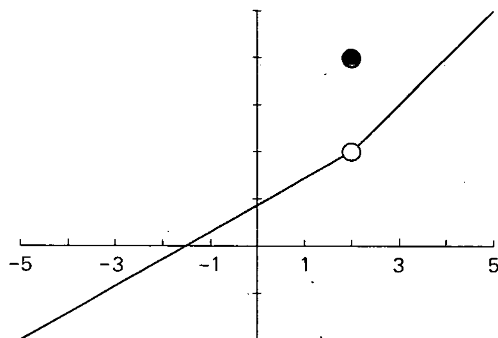
> Principe 1. Een wiskundige bewering die bij nadere beschouwing onzinnig is, bijvoorbeeld omdat er niet-gedefinieerde formules in voorkomen, is domweg *onwaar*.
> Principe 2. De notatie $f(X)$ wordt alleen maar gebruikt als $X \subset D_f$. Zie ook (5/6V1, p. 2).

Er zijn dus drie types voorbeelden van punten waar f niet continu is:

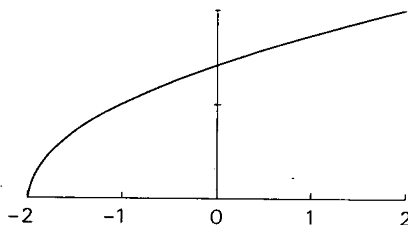


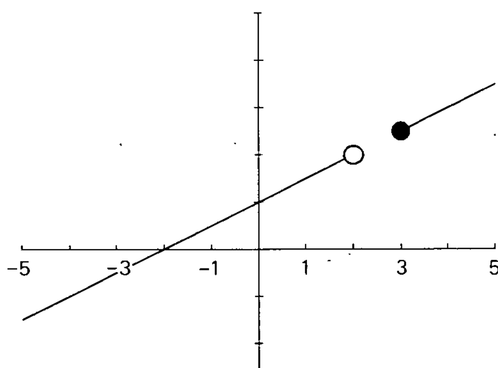
1°. $f: x \to \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$, (5/6V1, p. 36).
'De functie f is niet gedefinieerd voor $x = 2$, dus kan f niet continu zijn in $x = 2$.'

2°. j gedefinieerd door $j(2) = 4$, $j(x) = \frac{1}{2}x + 1$ voor $x < 2$, $j(x) = x$ voor $x > 2$. Zie (5/6V1, p. 35). De functie j is niet continu in 2.



3°. Op dezelfde pagina vinden we de functie
$g : x \to \sqrt{(x + 2)}$ en de functie $h : x \to \frac{1}{2}x + 1$ voor $x < 2$ of $x \geqq 3$.





g is niet continu in -2 en 'De functie h is discontinu in $x = 3$ omdat het punt $(3, 2\frac{1}{2})$ eveneens geen linkerbuurpunten heeft. Je kunt met je potlood dit punt niet via de grafiek passeren.'

Wel, de situatie in 2° is wat iedereen wel discontinu zou willen noemen, daar hoeven we verder niet over te praten.
Situatie 1° vertelt ons dat een functie niet continu is in punten buiten het domein. Bijvoorbeeld f: $x \rightarrow x$ met $D_f = [1, 2]$ is niet continu in het punt $x = 1000$. Volgens mij is het onzinnig om te spreken over eigenschappen van functies in punten waar ze niet gedefinieerd zijn. In een eerder artikel [2] is dit al uitgelegd. Ook hier weer blijkt dat je in de problemen komt als je je niet houdt aan de regels van logisch taalgebruik. En hier is sprake van onlogisch taalgebruik. De regels van Getal en Ruimte staan het toe te zeggen over de f van 1°: f is niet continu in 2 maar 2 is geen discontinuïteit van f. Want wat is een discontinuïteit? Lees maar wat er staat op (5/6V1, p. 35):

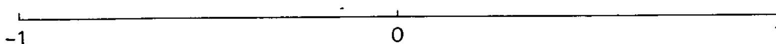
> 'Samenvatting. Een functie f is discontinu in a ($a \in D_f$), als het punt $(a, f(a))$ niet aan beide kanten directe buren op de grafiek heeft.'

Wordt van de leerlingen nu echt verwacht dat ze deze sofisterij begrijpen?[1]) Overigens komen de auteurs hier met een nieuw begrip, directe buren. Om te begrijpen wat dat zijn, lezen we drie pagina's door en vinden dan:

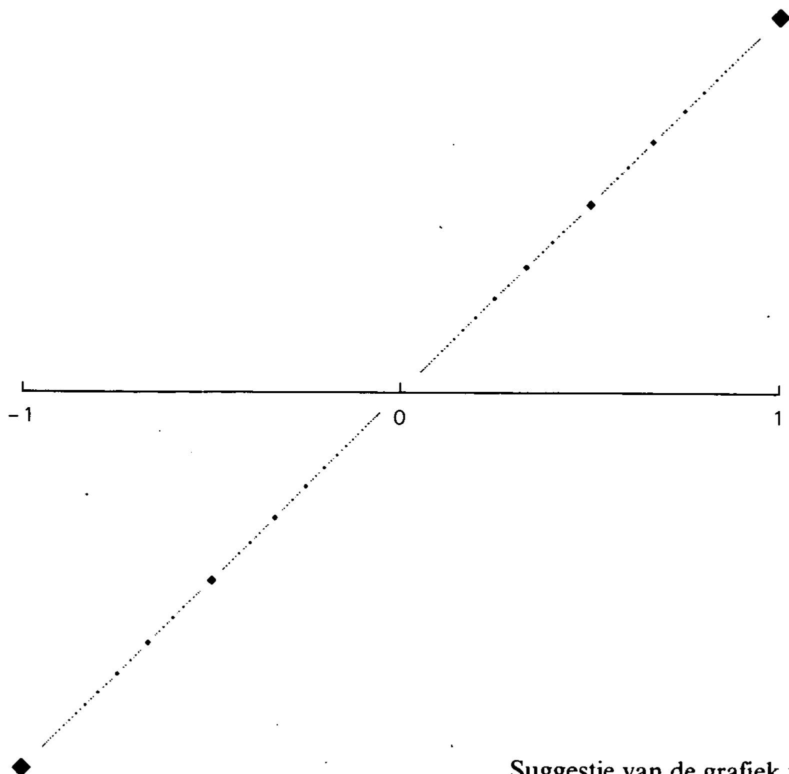
> 'We kunnen het begrip f is continu in $x = a$ nu iets nader preciseren. Het is noodzakelijk dat $f(a)$ bestaat. Stel $f(a) = b$. Vervolgens moet het punt $(a, f(a))$ van de grafiek onmiddellijke buren hebben, zowel links als rechts. Binnen ieder cirkeltje met middelpunt (a, b), hoe klein ook, moeten punten van de grafiek liggen'.

Het komt helemaal niet uit de verf wat onmiddellijke buren zijn. De betekenis die dit citaat eraan schijnt te hechten, is niet voldoende voor continuïteit in de gebruikelijke zin. Denk maar eens aan de Dirichlet-functie q, die 1 is voor alle rationale x en nul voor de andere reële x. Is die functie nu wel of niet continu in $x = 0$? En hoe is het gesteld met de functie r, gedefinieerd door $r(x) = xq(x)$? Kan ik met mijn potlood het punt (0, 0) op de grafiek van r passeren?





Suggestie van de grafiek van de Dirichlet-functie q



Suggestie van de grafiek van r

De intuïtieve uitleg die de auteurs van continuïteit geven, stuurt de leerlingen op een dwaalspoor. De essentie van continuïteit is veeleer dit:

als x weinig afwijkt, dan wijkt $f(x)$ ook maar weinig af.

Nu geven de auteurs onmiddellijk volgend op het laatste citaat hun formele definitie II-2 van continuïteit, maar ze leggen niet uit hoe ze van hun intuïtieve uitleg naar de formele definitie overgaan. Als we denken aan de functies q en r hierboven, dan zien we dat die overgang eigenlijk niet kan worden gemaakt. In situatie 3° is g niet continu in -2 en h is niet continu in 3 omdat er geen linkerburen zijn in $(-2, g(-2))$ respectievelijk $(3, h(3))$ van de grafieken. Dit betekent dat een functie nooit continu is in een randpunt van zijn definitiegebied. Dit is een rare conventie die ik nog nooit van mijn leven eerder heb gehoord. Deze conventie klopt met geen enkele definitie op hoger niveau, in infinitesimaalrekening, analyse en topologie. Aan de andere kant, als je naar definitie II-2 kijkt, dan lijkt het de gewone definitie, die ook in alle andere boeken staat. Dat komt omdat vaak $f(X)$ als volgt wordt gedefinieerd:

$$f(X) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \cap X\}.$$

Daar het boek de notatie $f(X)$ slechts gebruikt, wanneer $X \subset D_f$, zou het duidelijker zijn geweest als er in Definitie II-2 gestaan had:

... bij iedere omgeving Y van $f(a)$ een omgeving $X \subset D_f$ te vinden is, zodanig dat $f(X) \subset Y$.[2])

Ik kom weer terug op de definitie van de auteurs. In de wiskunde kan je definiëren wat je maar wilt, maar de theorie moet dan wel goed in elkaar zitten. De auteurs slagen er niet in dit doel te bereiken. Verderop in hun boek noemen en gebruiken ze stellingen, die met de gebruikelijke definities geheel in orde zijn, maar die met de definities van de auteurs aan bruikbaarheid verliezen en verkeerd worden toegepast. Ik geef een paar voorbeelden.[3])

A. Middelwaardestelling

We lezen op (5/6V1, p. 87):

'Als een functie differentieerbaar is in $< a, b >$ en continu in $[a, b]$ dan geldt
$\exists_{\xi \in < a,b >} f(a) - f(b) = (b - a)f'(\xi)$.'

Deze stelling is in het algemeen toepasbaar voor een interval $[a, b] \subset D_f$, ook als a of b randpunt van het domein is, maar in Getal en Ruimte is een functie *per definitie* nooit continu in een randpunt.

B. Integraalrekening

Stelling III-2 (5/6V2, p. 49) luidt:

'Als f continu is in $[a, b]$ en in $< a, b >$ niet van teken verandert, dan is de oppervlakte van het vlakdeel, ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$, gelijk aan $|\int_a^b f(x)dx|$.'

Nu wordt in som 15 op (5/6V2, p. 52) gevraagd:

'Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat ingesloten wordt door ...

de grafiek van $g: x \rightarrow \sqrt{x}$, de y-as en de lijn $y = 4$.'

Volgens het boek kan Stelling III-2 helemaal niet worden toegepast omdat $\sqrt{x}$ helemaal niet continu is op [0, 4], althans volgens het boek. Natuurlijk weet de leraar dat er niets mis kan gaan met functies zoals $\sqrt{x}$. De reden dat er niets mis gaat, is dat zulke functies in de gewone zin wel continu zijn in 0.

C. Raaklijn in randpunt

Op (5/6V1, p. 111) wordt $f: x \rightarrow \sqrt{(4x - x^2)}$, $D_f = [0, 4]$ onderzocht.
Dan staat er een opmerking:

'*Opmerking*: de raaklijn in de oorsprong heeft geen rc, want $f'(0)$ bestaat niet en $\lim_{x \downarrow 0} f'(x)$ ook niet.'

Ik vraag me nu twee dingen af.

1°. Wat is de raaklijn in een randpunt a en wat is dan haar richtingscoëfficiënt?
2°. Wat is het verband tussen het bestaan van de volgende twee limieten:

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{en} \quad \lim_{x \downarrow a} f'(x)?$$

Voor de eerste vraag: er is nergens in het boek een definitie van zo'n raaklijn te vinden en ik neem dus maar aan dat de raaklijn in een randpunt een soort limietstand is van koorden of beter halfrechten die beginnen in $(a, f(a))$ en passeren door een punt op de grafiek rechts van a, als a een linkerrandpunt van het domein is. Dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

en dit is met een gewone limietdefinitie gelijk aan

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

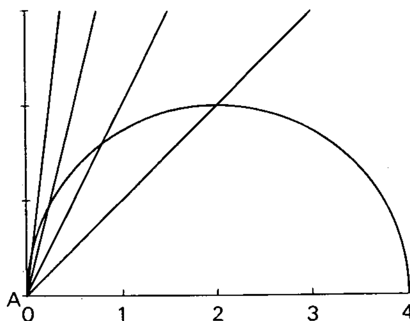
maar volgens het boek bestaat de laatste uitdrukking niet voor een randpunt a. Immers, f is niet continu in a volgens het boek, en het boek definieert uitdrukkelijk in Definitie III-1, (5/6V1, p. 44), dat $\lim_{x \to a} f(x)$ betekent $f(a)$, als f continu is in a.
Aan de andere kant vinden we in het boek alleen maar de volgende formule in Stelling II-1, (4V, p. 24) en in Stelling IV-1 (4/5H1, p. 80):

'De raaklijn in een punt A van de grafiek van f heeft als richtingscoëfficiënt $f'(x_A)$.'

Daarbij is $f'(x_A)$ gedefiniëerd als

$$\lim_{x \to x_A} \frac{f(x) - f(x_A)}{x - x_A}.$$

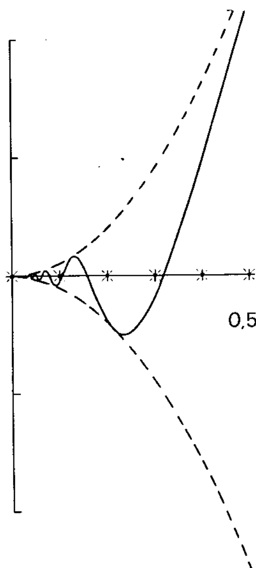
Als de auteurs de gebruikelijke definities hadden gekozen, waren al deze problemen er niet geweest en dan was de leerlingen bespaard gebleven dat een grafiek van een functie wel een raaklijn met eindige richtingscoëfficiënt kan hebben in een randpunt, maar dat de functie zelf daar toch niet continu is. De leerlingen moeten namelijk ook onthouden Stelling IV-1, (5/6V1, p. 76):



$x \to \sqrt{(4x - x^2)}$; wat is de raaklijn in A?

'Als een functie differentieerbaar is in a dan is f continu in a.'
Voor de tweede vraag beginnen we met op te merken dat de functie f gedefinieerd door

$f(0) = 0,$
$f(x) = x^2 \sin(1/x)$ voor $x > 0$



de eigenschap heeft dat voor $a = 0$ de eerste van de twee limieten wel bestaat, maar de tweede niet. Andersom kunnen we de middelwaardestelling toepassen. Als f continu is in $[a, b]$ volgens het gewone continuïteitsbegrip en differentieerbaar in $< a, b >$, dan kan je inderdaad bewijzen:

$$\text{als } \lim_{x \downarrow a} f'(x) \text{ bestaat, dan bestaat } \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ ook}$$

en beide limieten zijn dan gelijk. Indien de eerste limiet ∞ is, dan is de tweede het ook. De moeilijkheid voor de lezers van Getal en Ruimte is dat de middelwaardestelling in het geheel niet kan worden toegepast, omdat f niet continu is in het randpunt a.

3. Stijgen en Dalen

Getal en Ruimte definieert nergens wat bedoeld wordt met stijgen en dalen van functies in een willekeurige deelverzameling van het domein. In oudere edities van 5/6V1 was dit overigens wel het geval.
In het algemeen verwachten we dat een functie stijgend is in $V \subset D_f$, als voor alle a en b in V met $a > b$ geldt $f(a) > f(b)$. Dit valt samen met bijvoorbeeld (5/6V1, p. 95):

> 'Wij noemden deze functie [$x \to {}^2\log x$] stijgend omdat
> $\forall_{a,b \in D_f}\ a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.'

Ook correspondeert dit met V-2, (5/6V1, p. 95):

> 'f is stijgend in het open interval $X \subset D_f$ als
> $\forall_{a,b \in X}\ [a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)]$.'

Voorafgaand aan Definitie V-2 wordt uitgelegd dat $f: x \to -1/x$ niet stijgend is in D_f, maar wel in $\mathbb{R}^+$ en in $\mathbb{R}^-$.
Verder heeft het boek iets bijzonders, namelijk stijgen in een punt. De definitie van dit curieuze begrip vinden we in Definitie V-3, (5/6V1, p. 97):

> 'Een functie f heet stijgend in $x = a$ als f continu is in a en er een omgeving X van a bestaat, zo, dat
> $\forall_{x \in X}\ [(x > a \Rightarrow f(x) > f(a)) \wedge (x < a \Rightarrow f(x) < f(a))]$.

Verder vinden we ook nog Definitie IV-4 in (4/5H1, p. 94):

> 'De functie f heet stijgend in $x = a$ als er een interval om a bestaat, waarin f stijgend is.'

Voor alle definities van stijgen of dalen kunnen we de volgende vragen stellen:

1. Waarom wordt er niet gesproken over stijgen in een willekeurige $V \subset D_f$, of zelfs maar in een willekeurig interval, gesloten of halfgesloten?
2. Waar dient de continuïteit in de definitie van stijgen in een punt voor?
3. Waarom zijn de definities van stijgen in een punt in 5/6V1 en in 4/5H1 zo gekozen, dat ze elkaar wederzijds niet dekken?
4. Als f stijgend is in elk punt van V, is f dan ook stijgend in V? Als f stijgend in V is, is f dan ook stijgend in elk punt van V? Indien het antwoord op één van deze beide vragen nee luidt, zouden de leerlingen dan niet in de war kunnen raken?
5. Is de definitie van stijgen in een punt noodzakelijk?

Ik zal deze vragen nu proberen te beantwoorden.
1 De techniek om intervallen te vinden waarop f stijgt of daalt is de volgende.

Het tekenverloop van de afgeleide wordt bepaald. Als tussen twee opeenvolgende nulpunten a en b van f' geldt dat $f'(x) > 0$ voor alle $x \in \langle a,b \rangle$, dan is f stijgend in $\langle a, b \rangle$. Ik denk dat de definitie van stijgend zo eng gekozen is met het oog op deze toepassing. Maar in feite is f in deze situatie ook stijgend in $[a, b]$. Stijgend in een gesloten interval is ook een belangrijke eigenschap. Bijvoorbeeld, de functie $f: x \rightarrow x^3$ heeft de eigenschap dat $f'(0) = 0$ en $f'(x) > 0$ elders. Dus f stijgt in $\langle \leftarrow, 0]$ en ook in $[0, \rightarrow \rangle$, dus in de hele $\mathbb{R}$. Daarom vind ik het belangrijk om de eigenschap stijgend ook voor andere intervallen of in willekeurige V te definiëren.

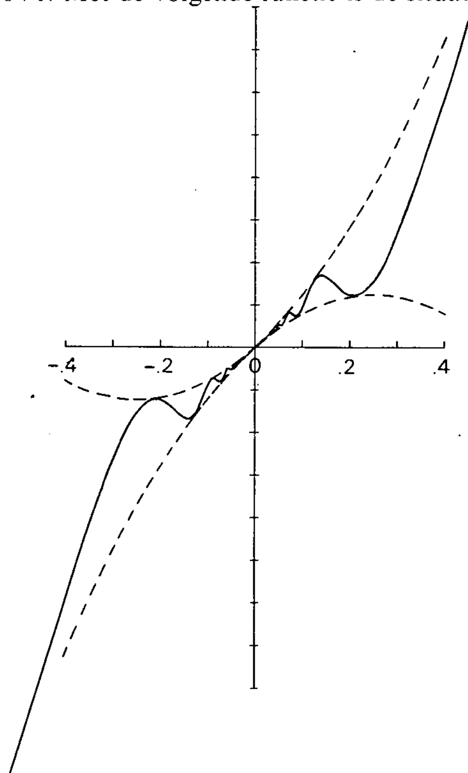
2 Ik begrijp niet waarom de auteurs continuïteit zo belangrijk vinden voor stijgen in een punt. Bijvoorbeeld de functie $f: x \rightarrow x + \text{Entier}(x)$ is zeker stijgend in $\mathbb{R}$, maar f is niet stijgend in 0 en trouwens ook in geen enkel geheel getal, want daar is f niet continu. Continuïteit is toch gewoon een hinderlijke extra voorwaarde, die alleen maar moeilijkheden geeft.

3 De definities van 5/6V1 en van 4/5H1 voor stijgen in een punt dekken elkaar niet. Bovendien is Stelling IV-11a in (4/5H1, p. 94) fout:

> '$f'(x_A) > 0 \Rightarrow f$ is stijgend in $x = x_A$.
> $f'(x_A) < 0 \Rightarrow f$ is dalend in $x = x_A$.'

Overigens is deze stelling weer wel goed met de definitie van 5/6V1.

Dat beide definities elkaar niet dekken, kunnen we als volgt inzien. De functie van 2 voldoet wel aan de definitie van 4/5H1, met a geheel, maar niet aan de definitie van 5/6V1. Met de volgende functie is de situatie precies omgekeerd:



$$f(0) = 0$$
$$f(x) = x + 2x^2 \sin(1/x) \text{ voor } x \neq 0.$$[4])

Deze functie voldoet aan de definitie van 5/6V1, maar niet aan de definitie van 4/5H1, als we $a = 0$ kiezen.

Bovendien geldt dat $f'(0) = \lim_{x \to 0} f(x)/x = 1$, en dit is groter dan 0. Toch is, zoals we hebben opgemerkt, f niet stijgend in $x = 0$ volgens de definitie van 4/5HI. We kunnen dit inzien door op te merken dat $f'(x) = 1 - 2\cos(1/x) + 4x \times \sin(1/x)$ voor $x \neq 0$, en deze uitdrukking wisselt voortdurend van teken als x naar 0 kruipt. Dus in geen enkel interval om 0 is f stijgend.
4 De functie $f: x \to -1/x$ is stijgend in elk punt van zijn domein, maar je mag niet zeggen dat f stijgend is in zijn domein. Het abstractieniveau van de meeste leerlingen is niet zo ver ontwikkeld dat ze het verschil tussen stijgend in elk punt van D_f en stijgend in D_f kunnen inzien. Daarbij komt dat leerlingen soms wel eens slordig zijn en er niet aan denken dat die begrippen kunnen verschillen, zelfs als zij het verschil geleerd hebben.
5 Nu we hebben gezien dat 'stijgen in elk punt van V' en 'stijgen in V' gemakkelijk verwarbare maar niet gelijke begrippen zijn, vragen we ons af of de definitie van 'stijgen in een punt' wel noodzakelijk is.
De enige plaats waar de auteurs dit begrip nodig hebben, is waar het bewijs staat van: als $f'(x_A) > 0$, dan is f stijgend in x_A. Als het alleen maar dient als andere naam voor '$f'(x_A) > 0$', waarom gebruiken de auteurs dan niet gewoon die laatste zinsnede, in plaats van 'stijgend in x_A'?

4. Ervaringen, Meningen en Vragen

Ik heb al gezegd, in 1.1 en 1.2, dat ik het moeilijk vind om les te geven uit Getal en Ruimte. Manke definities en foute stellingen kan ik maar moeilijk over mijn lippen krijgen. Sommigen zullen nu misschien zeggen dat ik helemaal niet over definities en bewijzen moet spreken, maar dat ik me moet beperken tot formules vertellen en plaatjes tekenen. De rest komt toch niet op het eindexamen. Maar op die manier wordt het vwo een soort havo met moeilijker sommen. Dat kan toch niet de bedoeling zijn?
Verder zou ik toch wel graag de goede leerlingen kunnen verwijzen naar het boek, als zij details willen weten. Maar wat moet ik dan doen als de beste leerlingen het meest in de war komen? Moet ik de methode van alles navragen en alles controleren dan maar afschaffen omdat die tot verwarring leidt?
Twee jaar geleden heb ik geprobeerd met stencils te werken. Dat was geen succes, door gebrek aan ervaring en ook door een te theoretische benadering. Verder moesten de leerlingen toch de sommen van het boek maken en gingen daarom het boek weer lezen met als gevolg nog meer verwarring en tijdverlies. Nu ik voor de tweede keer 5 vwo heb, geef ik bijna geen stencils meer en ik houd me een beetje op de vlakte met opmerkingen zoals: 'We spreken niet over

continuïteit in de randpunten'. Maar daardoor wordt het fundamentele probleem niet opgelost, bijvoorbeeld in de middelwaardestelling en in de integraalstelling. Ik ben er ook tamelijk zeker van dat de leerlingen later toch, als ze het boek bestuderen om de stof te herhalen, mijn opmerkingen weer vergeten zijn. Er blijft me niets anders over dan artikelen zoals dit te schrijven, in de hoop dat er misschien iets verandert.

Ik vraag me af waarom deze zaken al sinds de eerste druk in 1971 in deze boeken staan en waarom er nooit eens grondig de bezem door is gehaald. Het is beslist niet moeilijk om deze zaken recht te zetten. Is er dan niemand geweest die problemen met deze boeken heeft gehad? Vinden de meeste leraren misschien dat het allemaal niet zo belangrijk is omdat definities en bewijzen toch niet op het eindexamen komen?

Bij het wiskunde-onderwijs zijn van belang: de techniek van het rekenen, de kunst van het logisch en abstract redeneren en bewijzen, het kunnen toepassen en misschien ook de esthetische waarde van het vak op zichzelf. Ik heb de indruk dat de huidige praktijk van het eindexamen tot effect heeft dat alleen het eerste aspect aandacht krijgt in het wiskunde-onderwijs. Daarom wil ik de volgende vragen stellen:

1 Is het de bedoeling geweest om alleen maar aandacht aan de eerste waarde te schenken, en zo ja, waarom?
2 Als de andere waarden ook belangrijk zijn, hoe is het dan mogelijk voor een leraar om genoeg tijd vrij te maken om er aandacht aan te schenken?
3 Is er een manier waarop je bovengenoemde vier waarden kunt vergelijken? Kan men tot een aanvaardbare en bewust gekozen èn gehandhaafde verdeling van aandacht komen?

Noten

1) Een gedeelte van de problemen wordt veroorzaakt doordat de auteurs teveel met de logica proberen te doen. Hiermee hangt samen het idee dat D_f uit de formule voor f kan worden 'afgeleid', het kwistig gebruik van implicatiepijltjes voor elk soort van al dan niet heuristische gevolgtrekking en ook dikdoenerige pseudo-logische nonsens, zoals
'$x \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall_{p \in \mathbb{R}}\ x \in \langle p, \rightarrow \rangle$'
op (5/6V1, p. 50).
2) Definitie II-2 zou natuurlijk helemaal ondubbelzinnig worden als zij aldus begon:
Laat f een functie zijn met definitiegebied D_f en laat $a \in D_f$. Dan noemen we f continu in a als ...
3) De Aanvulling op het Vademecum voor de Wiskundeleraar (waarin opgenomen wijzigingen tot 1 november 1978) vermeldt op p. 48-1:
'Definitie. Een functie f is continu in a betekent: bij elke omgeving U van $f(a)$ bestaat een omgeving V van a waarvan het f-beeld deel van U is.'
Het vervolg van die tekst laat er geen twijfel over bestaan dat hiermee bedoeld is dat een functie wel degelijk continu kan zijn in randpunten van het definitiegebied. Tot 1984 wordt op het eindexamen rekening gehouden met de mogelijkheid dat de kandidaat een andere definitie geleerd zou kunnen hebben.
4) De figuren bij dit artikel zijn vervaardigd door het Rekencentrum van de T.H. te Eindhoven.

Literatuur

[1] *Getal en Ruimte*, K. de Bruin, A. Kelfkens, D. Leujes, P. C. Schnetz, H. Steur, A. H. Syswerda, R. A. J. Vuijk, Educaboek, Culemborg.
4V 1e druk, 1975

4/5H1 6e druk, 1979
5/6V1 5e druk, 1978
5/6V2 4e druk, 1978
[2] Cheng Shan Hwei en J. W. Nienhuys, *Onwaar versus Onzinnig*, Euclides 54 (1978/79), p. 73-80.

Over de auteurs:
Cheng Shan Hwei geeft les aan het Hertog Jan College in Valkenswaard.

Naschrift van H. Syswerda

Graag maak ik, namens de auteurs van Getal en Ruimte, gebruik van de geboden gelegenheid een paar kanttekeningen te maken bij het zeer doorwrochte artikel van collega Cheng.
Het ziet er naar uit dat wij enigszins andere uitgangspunten hadden bij het maken van de besproken tekstfragmenten, dan mevrouw Cheng bij de beoordeling ervan.
Getal en Ruimte is een methode voor gewone leerlingen, die steeds probeert rekening te houden met hoe zo'n gewone leerling denkt en praat. Daarom ligt het voor de hand dat wij in onze boeken een havoleerling anders aanspreken dan een vwo-leerling en een vwo-5-leerling anders dan een vwo-6-leerling; en deze alle anders dan een *i*-de jaars student wiskunde zou kunnen worden aangesproken. Waren alle definities in 4/5H1 en 5/6V1 gelijkluidend, dan zouden wij naar onze opvatting tekort schieten!
Eerste prioriteit geven aan een leerlingvriendelijke tekst, brengt onvermijdelijk met zich mee dat op het punt van uiterste exactheid concessies moeten worden gedaan; wij wensen niet over de hoofden van de leerlingen heen te schrijven. We maken er dan ook geen punt van onze tekst in te dekken tegen confrontatie met functies die op het havo- en vwo-repertoire niet voorkomen.
Continuïteit hebben we teruggebracht tot de onzes inziens voor leerlingen meest aansprekende vorm: zoiets als passagemogelijkheid. Een doodlopende steeg is gevoelsmatig niet continu. Vandaar discontinuïteit in de randpunten van een domein. Natuurlijk kan het ook anders. Maar voor continuïteit in een randpunt is psychologisch meer nodig dan alleen maar één extra denkstap.
Uiteraard zullen we bij de eerstvolgende herziening van 5/6V1 de Nomenclatuurcommissie volgen in dezen, evenals in het afbeelden van intervallen die ten dele buiten het domein van de functie vallen. Natuurlijk zien wij wel, dat dit voor de consistentie van de theorie bepaalde voordelen heeft. Dat door een en ander een functie continu wordt in een geïsoleerd punt, moet dan maar zoveel mogelijk verzwegen worden.
'stijgen in een punt' sluit aan bij de wereld van de toepassingen. Als ik op een weg die klimt van A naar B, onderweg stilsta in punt C, dan is die weg daar *ook* stijgend. Hij heeft een helling, een steilheid op die plaats C. Al zou je het begrip stijgend in een punt een hele tijd formeel kunnen missen, practisch is dat niet. Wat doe je als didacticus, wanneer je niet mag zeggen dat $x \to x^2$ in 0 niet stijgend is en niet dalend is? Onze leerlingen mogen dat wèl zeggen.
Bij de differentiaalvergelijkingen (lijnelementenvelden) kunnen onze leerlingen

zoiets zeggen als 'hier kun je een integraalkromme maken, die stijgend door het singuliere punt gaat'.
Dat $x \rightarrow x^2$ stijgend zou zijn in [0, 1] maar niet in 0, is voor die al eerder genoemde gewone leerling een heel rare zaak. Dit is de reden dat wij bij het stijgen in een interval alleen met open intervallen werken.
Opgave 15a op bladzijde 52 van 5/6V2 is zonder meer een uitglijder. Een dergelijke integraal zoals daarbij betrokken, is bij ons een oneigenlijke integraal; deze behoeft inderdaad een (korte) nadere toelichting.
Wij denken dat het belangrijk is ervoor te zorgen dat wiskundetaal veel herkeningsmomenten biedt, in de letterlijke zin van het woord verstaanbaar is. Dit werkt motiverend bij leerlingen voor wie wiskunde een moeilijk vak is. Niet dat het altijd voor elkaar te krijgen is, maar je kunt het op zijn minst proberen! Wij zijn zeker bereid te zijnertijd bij de bewerking van 5/6V1 de theorie bij te scherpen, overal waar dit mogelijk is zonder de afstand tot de leerling te groot te maken. We zullen bepaald ons voordeel doen met de kritiek van mevrouw Cheng. We danken haar zeer voor de aandacht die ze ons werk heeft willen geven.

Jaarrede 1981

Dames en Heren,

In het informatieblad van de vereniging kunt u onder andere lezen: 'Rechtspositionele zaken laat de vereniging over aan de algemene lerarenorganisaties'. Deze beperking leek ons de afgelopen maanden wel een zeer prettige, maar het mes, waarmee in de rechtspositie gesneden moet worden, snijdt aan twee kanten, waarbij de andere kant het onderwijs is. Daar de vereniging wel tot doel heeft het behartigen van de belangen van het wiskundeonderwijs, wordt zij toch geconfronteerd met de financiële nood.

Vorig jaar eindigde ik de jaarrede met de zin 'OVERIGENS BEN IK VAN MENING DAT HET IOWO BEHOUDEN MOET BLIJVEN'. U weet nu echter dat ondanks de pogingen van velen om het IOWO te behouden, dit toch wordt opgeheven. Er wordt wel een nieuwe eenheid voor wetenschappelijk onderzoek ten behoeve van het wiskundeonderwijs van zeer beperkte omvang ingesteld.Het is speciaal ook voor buitenlanders een onbegrijpelijke zaak dat in Nederland zo met het IOWO is omgesprongen. In Berkeley hebben veel congresdeelnemers van het ICME-congres hiervan duidelijk blijk gegeven. Er werd zelfs gevraagd hoe een land, dat zoveel aan ontwikkelingshulp doet, zichzelf zo tekort kan doen.
Degenen die jarenlang bij het IOWO gewerkt hebben wil ik hartelijk danken voor alles wat zij voor de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs hebben gedaan en de werkers bij de nieuwe onderzoekseenheid wens ik veel succes toe.

Betreffende de A-, B- en C-cursussen van de didactiekcommissie van onze vereniging, waarvan te vrezen was dat deze samen met het IOWO ten grave gedragen zouden worden kan ik wat minder pessimistische geluiden laten horen, want ten aanzien van de nascholing bestaat er thans een 'Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde' waarin vertegenwoordigd zijn:
- De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren,
- de Wiskundeafdelingen van de Universitaire Lerarenopleidingen,
- de Wiskundeafdelingen van de Nieuwe Leraren Opleidingen,
- de Wiskundeafdeling van de Stichting Leerplan Ontwikkeling,
- de M.O.-overlegraad, en uiteraard
- het IOWO voor zolang dit instituut nog bestaat.

De nascholing voor wiskundeleraren lbo/mavo/havo/vwo wordt dit jaar gege-

ven op de NLO's en de ULO's; het werkverband heeft daarbij een coördinerende taak. Een greep uit de onderwerpen:
- computerkunde en algoritmiek op school,
- computerkunde op leraarsniveau,
- computersystemen en rekenmachientjes,
- toepassingen van wiskunde,
- statistiek en kansrekening,
- kennismaken en werken met IOWO-pakketjes,
- verlevendiging van de schoolwiskunde.

Daar het met de nascholing op dit moment uiterst droevig gesteld is, zal het werkverband zich zoveel mogelijk beijveren om tot een gemeenschappelijk cursusaanbod te komen.
Het werkverband is ook bereid de verantwoordelijkheid voor de succesvolle A-, B-, C-cursussen van onze vereniging op zich te nemen. Immers, in de periode van 1973 tot 1979 zijn er reeds 27 trainingen gehouden, waaraan 1400 cursisten hebben deelgenomen. Vanaf december 1979 heeft het werkverband de organisatie van de trainingen overgenomen en in maart 1980 werden zo onder nieuwe én oude leiding een B- en een C-cursus gehouden. Hieraan namen 105 cursisten deel. Principieel zijn bij deze cursussen leraren met 1e, 2e of 3e-graads bevoegdheden gemengd.
De A-cursus gaat over leerstofordening ten behoeve van het lesgeven en over de wijze waarop doelstellingen van wiskundeonderwijs de lespractijk kunnen en moeten beïnvloeden. Er wordt gebruik gemaakt van materiaal dat direct betrekking heeft op de klassesituatie, zoals schoolboekteksten en proefwerkvragen.
De B-cursus heeft als thema: samenwerken. De aandacht wordt gericht op de verschijnselen die zich voordoen als mensen gaan samenwerken; in het bijzonder als ze gaan samenwerken in een leerproces. In de cursus ligt het accent vooral op de samenwerking tussen leraar en leerling.
De C-cursus heeft als thema: oog krijgen voor en rekening houden met verschillen tussen leeringen. Waar mogelijk wordt gewerkt met concreet materiaal en wordt geprobeerd de dagelijkse schoolpractijk in het vizier te houden.

De werkgroep HEWET (herverkaveling examenprogramma wiskunde I en II) heeft begin 1980 haar eindrapport doen verschijnen. In dit rapport zijn de reacties op het één jaar eerder verschenen interimrapport zoveel mogelijk verwerkt. Het bestuur wil hier zijn grote waardering uitspreken voor het werk dat door de HEWET-commissie is verzet. Het eindrapport is naar veler oordeel een evenwichtig werkstuk dat goede perspectieven biedt voor essentiele verbeteringen van het wiskundeonderwijs in het vwo, zeker nu het er naar uitziet dat staatssecretaris De Jong groen licht geeft voor de plannen van de werkgroep. Dit betekent dat er hoogst waarschijnlijk volgend schooljaar op 3 scholen experimenten van start zullen gaan met een nieuw wiskunde-A programma.
Het tijdschema, zoals dat in het rapport is vermeld, zal ten aanzien van de nascholing van docenten enigszins worden bijgesteld. De uitvoering van de werkzaamheden, verbonden aan schoolexperimenten en nascholing zal geschieden door twee IOWO-medewerkers, die ondergebracht worden bij de nieuwe onderzoekeenheid.

De tegenstellingen tussen de zogenoemde Inspectorale Projectgroep Examenprogramma's lbo, de IPEP, en de vakproduktiegroep wiskunde voor deze projectgroep zijn dermate groot dat besloten is de problematiek van het examenprogramma wiskunde in een later stadium opnieuw te bekijken. Het conceptprogramma van de vakproduktiegroep voldeed niet aan de voorwaarde van gedetailleerde doelstellingsomschrijving met aanduiding van beheersingsniveau. De vakproduktiegroep verschilde op dit punt fundamenteel van mening met de leden van de IPEP, want de vakproduktiegroep zag in die omschrijving geen heil en koos voor een essentieel ander middel, namelijk het opzetten van een vraagstukkenbank. Deze vraagstukkenbank zou tot stand kunnen komen doordat individuele docenten, secties van scholen en lerarenopleidingen vraagstukken zouden insturen. Zo'n vraagstukkenbank zou opgaven kunnen bevatten die over een aantal jaren op het examen gevraagd kunnen worden: zij zou het examen verduidelijken zonder verstarrend te werken. De IPEP vindt dat het samenstellen van een examenprogramma door een in te stellen Adviesgroep Examenprogramma's, de AGEP, opnieuw zou moeten worden bekeken. Deze groep krijgt een permanent karakter en zal niet beperkt blijven tot vertegenwoordigers uit het lbo, maar zal ook mensen uit het algemeen voortgezet onderwijs omvatten. Deze uitbreiding naar het avo heeft zijn goede kanten. Overigens betreuren wij het dat door het verschil van mening tussen IPEP en werkgroep de twee verschillende examenprogramma's wiskunde voor lbo-c voorlopig gehandhaafd blijven en er dus bij het lbo twee verschillende c-examens wiskunde zullen blijven bestaan. Deze twee c-examens verschillen naar opgaven en niveau, terwijl er door de leerlingen dezelfde rechten aan kunnen worden ontleend, namelijk doorstroming naar het mbo. Wij vinden dat groepen leerlingen hierdoor benadeeld worden en hopen dat aan deze situatie zo snel mogelijk een einde komt.

Zoals U misschien weet bestaat het centraal schriftelijk examen wiskunde voor mavo-4, mavo-3 en lbo-c uit twee gedeelten van elk twee uren. De kandidaten wordt een meerkeuzetoets voorgelegd en een toets in open vraagvorm. Reeds bij de jaarvergadering van 1978 hebben wij melding gemaakt van het voornemen van de staatssecretaris om in de toekomst bij de mavo-examens voor wiskunde (en ook voor handelskennis) het aantal examenwerken terug te brengen tot één werk van twee uren. In een schrijven aan de staatssecretaris hebben wij destijds te kennen gegeven dit voornemen te betreuren en hebben wij er op aangedrongen dat twee examenwerken op onderwijskundige gronden te handhaven. Thans hebben wij vernomen dat in het schooljaar 1984/1985 de staatssecretaris zijn voornemen ten uitvoer wil brengen. Er is door het bestuur een werkgroep ingesteld, die bestudeert welke mogelijkheden er zijn ten aanzien van vorm en inhoud van het mavo/lbo-examen wiskunde, als het examen tot één zitting zal worden teruggebracht. De werkgroep zal trachten algemene principes en doelstellingen te formuleren die als basis kunnen dienen voor examenvragen. Wat de vorm van het examenwerk betreft zal de werkgroep zich bezinnen op allerlei vraagvormen, zowel op meerkeuzevragen als op open vragen zoals kort antwoord- en lang antwoord-vragen. De werkgroep beoogt zich niet te bemoeien met allerlei problemen rond het centraal schriftelijk examen zoals bijvoorbeeld objectieve normering en tweede correctie. Evenmin is het de bedoeling dat de

werkgroep eindexamens ontwerpt; dit moeilijke en creatieve werk laat zij over aan docenten in de adviescommissies. De werkgroep beperkt zich tot een studie van de inhoud en de vorm van het genoemde examen. Zij zal over enige tijd het bestuur op de hoogte stellen van haar bevindingen. Het bestuur zal aan de hand hiervan een advies opstellen dat zal worden aangeboden aan de Commissie Vaststelling Opgaven.

Middels het Vademecum voor de Wiskundeleraar is u bekend hoe jaarlijks de examenopgaven tot stand komen. In overleg met het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren worden jaarlijks docenten uitgenodigd een volledig stel examenwerk in te zenden. Zij ontvangen hiervoor als beloning een bedrag, gelijk aan drie vacaties. Op voordracht van het bestuur van de NVvW worden adviescommissies benoemd. Deze adviescommissies stellen met gebruikmaking van de ingezonden opgaven examenwerken op en zenden deze aan de Commissie Vaststelling Opgaven. De CVO beoordeelt het werk en overlegt met de voorzitters van de adviescommissies over eventueel nog aan te brengen wijzigingen. De uiteindelijke verantwoordelijkheid voor het werk berust bij de CVO.
Om financiële redenen zal de eerste schakel, de werkers uit het veld die opgaven insturen, moeten gaan vervallen. Ofschoon u zou kunnen voorstellen om de salarissen van de wiskundeleraren tijdelijk los te koppelen van de salarissen van de overige docenten, ze te verlagen en ze vervolgens weer te koppelen aan de overige salarissen en de hierbij vrijgekomen gelden te besteden voor het maken van examenopgaven is uw bestuur van mening dat een eenvoudiger oplossing te bedenken is. Het bestuur doet een beroep op alle docenten om ideeën voor komende examens op te sturen naar het bestuur van uw vereniging, dat dan voor doorzending naar de adviescommissie kan zorgen. Het voordeel is dat u nu niet meer op een uitnodiging van de inspectie behoeft te wachten en geen totaal examen behoeft in te zenden, maar ook reeds met één vraagstuk aan het eindexamen kunt meewerken.

Daar hiermee het huiswerk voor de volgende keer is opgegeven rest mij nog slechts u een bijzonder prettige studiedag toe te wensen.

Th. J. Korthagen, voorzitter

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 8 november 1980 in het gebouw van de S.O.L. te Utrecht

Om 10.07 uur opent de voorzitter, Th. J. Korthagen de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom de ereleden prof. H. Freudenthal en P. Vredenduin, de inspecteurs W. E. de Jong en N. J. Zimmerman, de vertegenwoordigers van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars, F. Laforce, A. Schoeters en mevr. G. Simons, de vertegenwoordigers van Euclides, B. Zwaneveld en B. Muller, en de vertegenwoordiger van Wolters-Noordhoff, D. Soeteman. Hierna spreekt de voorzitter de jaarrede uit.

Na de jaarrede worden de notulen van de algemene vergadering van 27 oktober 1979 en de jaarverslagen goedgekeurd. De penningmeester wordt gedéchargeerd. In de nieuwe kascommissie worden gekozen mevrouw D. A. de Buth en de heer J. A. R. van Thull, beiden uit Leiden. De heren C. Th. J. Hoogsteder en F. J. Mahieu worden als bestuurslid herkozen. De contributie voor het verenigingsjaar 1981/1982 wordt vastgesteld op *f* 45,–. Op een vraag of de contributie niet naar draagkracht geheven kan worden antwoordt de penningmeester dat er een speciale regeling is voor studentleden. Deze betalen geen *f* 40,– maar *f* 30,–. Voor pas beginnende leraren die een zeer geringe baan hebben kan op verzoek een gelijksoortige korting gegeven worden, waarbij deze leden slechts de prijs van Euclides betalen. Hierna geeft de voorzitter het woord aan de heer L. Muskens, die een inleiding geeft op de studiedag met als thema 'Gonio als invalshoek'.
Na deze inleiding zijn er vijf werkgroepen, n.l. Gonio en taal, Gonio en de omgang tussen leraar en leerling, Vlieg er eens in, Landmeetkunde en Periodieke functies.
Tijdens de luchpauze is er een markt, waaraan docenten met hun 'vondsten' op het gebied van leermiddelen en didactiek deelnemen.
Na de lunchpauze houdt de heer H. Bos een inleiding over 'Geschiedenis van de gonio', waarna weer in de vijf werkgroepen gewerkt wordt.
Aan het verloop van deze studiedag zal een afzonderlijk nummer van Euclides gewijd worden.
Als laatste onderdeel van deze dag volgt de rondvraag. Als eerste vraagt de heer G. Schoemaker het woord. Hij wil nog even voortborduren op de passage in de jaarrede betreffende de IPEP. De vakproduktiegroep wiskunde wil een flexibiliteit in het programma inbouwen. Zij wil de inhoudelijke discussie voortzetten. Volgens de IPEP is de inhoud van het rapport van de vakproduktiegroep voortreffelijk, maar de IPEP wil geen gesprek en er komt geen verspreiding van het rapport. Het rapport zal worden doorgegeven aan de AGEP. De vereniging moet waakzaam zijn want een examen heeft grote invloed op het onderwijs. Exemplaren van het rapport zijn te bestellen bij F. Gaillard, L. Muskens en G. Schoemaker. De voorzitter deelt mee dat de eerstvolgende bestuursvergadering aan de examenproblematiek gewijd is en dat er in januari, in een bespreking met de inspectie, een openbare discussie van het rapport aangekaart zal worden.
De heer H. Pot vraagt de aandacht van de vergadering voor Pythagoras en roept op tot medewerking.

De heer J. van Dormolen vestigt de aandacht van de vergadering op de leesportefeuille. Hierin bevinden zich goede didactische tijdschriften. Voor verdere informatie verwijst hij naar het 'Vademecum'.
De heer F. Laforce feliciteert de vereniging met de geslaagde jaarvergadering met goede onderwerpen. Hij nodigt de aanwezigen uit voor de jaarvergadering van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars op *21 februari* te Leuven en voor de gemeenschappelijke studiedag van de Nederlandse en Vlaamse vereniging op *28 maart* in het Koninklijk Atheneum te Kapellen (België).
De heer J. van de Groep vraagt of de publicaties over het nieuwe wiskundeprogramma A en B (het Hewet-rapport) nog verder uitgewerkt worden voor docenten. Hij is bang dat er anders te weinig duidelijkheid is voor de docenten. Volgens de heer M. Kindt zal in een vroeg stadium aandacht besteed worden aan

nascholing op grote schaal. Tijdens de ontwikkeling van het project op experimenteerscholen zal er regelmatig gepubliceerd worden. Voor de experimenten hebben zich reeds scholen opgegeven.
De heer Van de Groep constateert dat het belang van computerkunde vroeger zwaar werd bediscussiëerd. Computertijd kost veel geld. Ziet het ministerie nu het belang van computerkunde in? De heer Kindt deelt hierop mee dat de staatssecretaris het Hewet-rapport vermoedelijk als geheel heeft geaccepteerd. Experimenten zullen uitsluitsel moeten geven. De heer J. de Lange voegt hieraan toe dat het Onderwijs Computercentrum blijft bestaan en armlastige scholen kan bijstaan. Er komt een nieuw soort Wiskrant die de Hewet-experimenten gaat promoten. De heer J. Sloff constateert dat Vlamingen veel aan computers doen en de Nederlandse Vereniging weinig. Hij vraagt of hier niet een taak van de vereniging ligt de scholen voor te lichten. De voorzitter ziet hier een taak voor een commissie, waarin de heer Sloff kan participeren.
Voor de heer Van de Groep is het nog steeds niet duidelijk welke rekenmachientjes op het eindexamen gebruikt mogen worden. Volgens de voorzitter is programmeerbaarheid de bovengrens. De heer L. Muskens vindt dat een norm ligt bij wat de docent zelf vindt dat hij op het examen mag eisen en mag toestaan.
Om 16.46 sluit de voorzitter, na een woord van dank aan de organisatoren van de studiedag de vergadering.

De presentielijst was getekend door 170 aanwezigen.

Recreatie

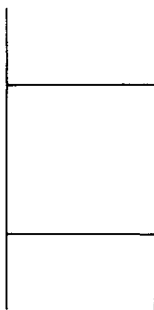
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

429. De dokter uit opgave 425 liet elke ochtend om de 10 minuten 12 patiënten op zijn spreekuur komen waarvan er 6 een behandeltijd van 9 en 6 van 11 minuten vergden. Zijn spreekuur liep daardoor gemiddeld 1,72 minuut uit.
Om tijd te winnen liet hij al zijn patiënten op de eerste na 1 minuut vroeger komen. Hoeveel tijd won hij daardoor gemiddeld uit en hoeveel minuten werd de gemiddelde wachttijd van de patiënten meer?

430. In een vlak is een gelijkzijdige driehoek ABC gegeven. Gevraagd de verzameling van de punten P in het vlak waarvoor PA, PB en PC lengten van zijden van een driehoek zijn.
(naar stelling 4 van de dissertatie van J. H. van Lint)

431. Onderstaand houten vierkant is ingeklemd tussen twee ijzeren linialen. Het moet 90° gedraaid worden. Dat kan niet zonder het in stukken te zagen. Meer dan drie stukken mag niet. De stukken mogen niet over elkaar heen geschoven worden. Hoe kan dat?



Oplossingen

427. De variabelen zijn variabelen over $\mathbb{Z}^+$.
Voor welke a en b geldt $a^2 + ab + b^2 = 1981^2$?
We stellen meer algemeen $a^2 + ab + b^2 = c^2$ en nemen eerst aan, dat a, b en c geen gemeenschappelijke factor hebben. Ze hebben dan twee aan twee ook geen factor gemeen.

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 \Leftrightarrow a = \frac{-b + \sqrt{(4c^2 - 3b^2)}}{2}$$

Stel $4c^2 - 3b^2 = p^2$.
Dan is

$$3b^2 = (2c - p)(2c + p)$$

Een gemeenschappelijke factor van $2c - p$ en $2c + p$ is factor van $4c$ en van $2p$. Er zijn twee mogelijkheden.

a 2 is geen gemeenschappelijke factor. Dan is elke gemeenschappelijke factor van $2c - p$ en $2c + p$ een factor van c en van b, hetgeen in strijd is met de aanname dat b en c geen factor gemeen hebben. Dus hebben $2c - p$ en $2c + p$ geen factor gemeen.

b 2 is wel een gemeenschappelijke factor.

We onderzoeken eerst geval a.
Er zijn dan getallen q en r waarvoor

$$b = qr,\ 2c - p = q^2,\ 2c + p = 3r^2 \quad \text{of}$$

$b = qr,\ 2c - p = 3q^2,\ 2c + p = r^2$

Dit levert in beide gevallen

$$b = qr,\ c = \frac{q^2 + 3r^2}{4},\ p = \frac{|3r^2 - q^2|}{2},\ a = \frac{p - b}{2}$$

In ons geval is $c = 1981$, dus

$q^2 + 3r^2 = 7924$

Dit levert als mogelijkheden

$r = 51$	$q^2 = 121$	$q = 11$	$b = 561$	$a = 1640$
50	424			
49	721			
48	1012			
47	1297			
46	1576			
45	1849	$q = 43$	$b = 1935$	$a = 89$

en wegens $b = qr < 1981$, heeft het geen zin kleinere waarden van r te onderzoeken.

Geval b.

Stel $b_1 = \frac{1}{2}b,\ p_1 = \frac{1}{2}p$.

Dan is

$3{b_1}^2 = (c - p_1)(c + p_1)$

Op dezelfde manier als onder a vinden we

$$b = 2qr,\ c = \frac{q^2 + 3r^2}{2},\ p = |3r^2 - q^2|,\ a = \frac{p - b}{2}$$

Dit levert geen oplossing.

Nu nog het geval dat a, b en c wel een factor gemeen hebben.

$1981 = 7 \cdot 283$

De gemeenschappelijke factor kan dus alleen 7 of 283 zijn.

Gemeenschappelijke factor 7 levert

${a_2}^2 + a_2b_2 + {b_2}^2 = 283^2$ waarin $a_2 = \frac{1}{7}a$ en $b_2 = \frac{1}{7}b$

In geval a geeft dit

$r = 19$	$q^2 = 49$	$q = 7$	$b_2 = 133$	$a_2 = 192$	$b = 931$	$a = 1344$
18	160					
17	265					
16	364					
15	457					
14	544					

en wegens $b_2 = qr < 283$, kunnen we hier stoppen.

In geval b is er weer geen oplossing.

Gemeenschappelijke factor 283 levert

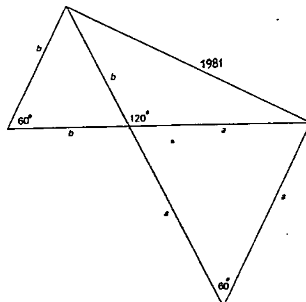
${a_3}^2 + a_3b_3 + {b_3}^2 = 49$ waarin $a_3 = \frac{1}{283}a$ en $b_3 = \frac{1}{283}b$

We zien hier direct dat de enige mogelijkheid is

$a_3 = 5,\ b_3 = 3,\ a = 1415,\ b = 849$

Leid hieruit af welke oplossingen heeft

$a^2 - ab + b^2 = 1981^2$



Uit de figuur zien we: als a en b voldoen aan $a^2 + ab + b^2 = 1981^2$, dan voldoen $(a + b, a)$ en $(a + b, b)$ aan $a^2 - ab + b^2 = 1981^2$. Door in omgekeerde richting te redeneren zien we, dat er geen andere oplossingen zijn.

428. In onderstaande vermenigvuldiging stellen a en b verschillende cijfers voor. Op de plaats van de stippen komen deze cijfers niet meer voor. Gevraagd de uitkomst.

$$\begin{array}{r} . . . a b \\ b a b \\ \hline . . a b . . \\ . . . . b a \\ . . a b . . \\ \hline . b . . . b . . \end{array} \times$$

Wegens

$$\begin{array}{r} . . . a b \\ a \\ \hline . . . . b a \end{array}$$

is $b = 1$, $b = 6$ of $b = 5$. Hiervan is $b = 1$ niet mogelijk, omdat het eerste deelprodukt zes cijfers heeft; $b = 6$ geeft geen oplossing; $b = 5$ geeft als enige mogelijkheid $a = 9$.
Zonder veel moeite vindt men nu de volgende twee mogelijkheden:

$$\begin{array}{r} 20659 \\ 959 \\ \hline \end{array} \quad \text{en} \quad \begin{array}{r} 30659 \\ 959 \\ \hline \end{array}$$

De tweede mogelijkheid vervalt, omdat de tweede stip van het tweede deelprodukt een 5 wordt. Men vindt als uitkomst van de eerste vermenigvuldiging 19811981. Waarmee de auteur ons een goed, en zelfs een zeer goed 1981 toewenst.

Boekbesprekingen

Wait, R., *The Numerical Solution of Algebraic Equations*, John Wiley and Sons, Chichester etc., 1979, 158 blz., £ 7.50,–

Dit boek bevat een één-semester cursus op kandidaatsniveau over het numeriek oplossen van lineaire en niet-lineaire algebraïsche vergelijkingen. Het is een uitstekende, plezierig leesbare inleiding, met veel voorbeelden en opgaven. Er wordt steeds rekening gehouden met de aspecten die naar voren komen als men overgaat tot het maken van computerprogramma's. Het onderhavige deelgebied van de numerieke wiskunde heeft zich de laatste twintig jaar sterk ontwikkeld. Veel zaken kunnen we thans als overbodige franje zien, en dit boek laat alle overbodige franje weg. Zodoende blijkt het mogelijk om binnen de beperkte omvang van dit boek alle belangrijke moderne ontwikkelingen een plaats te geven. Zaken zoals orthogonale factorizatie voor overbepaalde systemen, methoden voor ijle stelsels en quasi-Newton methoden worden helder en beknopt behandeld; de meeste inleidende boeken komen aan deze onderwerpen niet toe. Jammer dat de auteur zijn expositorisch talent niet gebruikt heeft om ook nog eigenwaarde-problemen te behandelen. Voor het in de titel vermelde onderwerp is dit thans waarschijnlijk het meest bij-de-tijdse en didactisch verantwoorde inleidende leerboek.

P. Wesseling

Zur Entstehung neuer Denk- und Arbeitsrichtungen in der Naturwissenschaft, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 148 blz., DM 26,–.

Dit 'Festschrift zum 90. Geburtstag von Hans Schimank' beoogt in een aantal artikelen enige ontwikkelingen in wiskunde en natuurwetenschappen te signaleren en in een historisch kader te plaatsen. Vooral dit laatste aspect komt nadrukkelijk aan de orde vanwege het feit dat prof. Schimank zich intensief met dit onderwerp heeft beziggehouden.
Veel nieuws komt in dit boek niet naar voren. Het is echter wel aardig een aantal ontwikkelingen eens naast elkaar te hebben. Een opsomming van de diverse stukken geeft een indruk van de inhoud:

Scriba, C. J.:	Geschichte der Naturwissenschaften als neue Disziplin. Zur Frühgeschichte der Jahresversammlungen in Deutschland und der Internationalen Kongresse.
Mehrtens, H.:	Das Skelett der modernen Algebra. Zur Bildung mathematischer Begriffe bei Richard Dedekind.
Kraft, F.:	Alte und neue Physik.
Meijer, K.:	Perspectiva - Optica - Photica - Dioptrica. Bemerkungen zum Wandel des Gegenstandes in der Optik.
Schütt, H. W.:	René Just Haüy und die Entwicklung der Kristallographie zu einem konstitutiven Teilgebiet der Mineralogie.
	Die Entstehung der Organischen Chemie im 19. Jahrhundert-ein Überblick.
Hünemörder, C.:	Jakob von Uexküll (1864-1944) und sein Hamburger Institut für Umweltforschung.
Lohff, B.:	Hat die Rhetorik Einfluss auf die Entstehung einer experimenteller Biologie in Deutschland gehabt? Eine Studie zu Johannes Müllers Physiologie.

W. Kleijne

G. S. Gill, *Applications of Calculus to accompany Calculus*, John Wiley & Sons, 200 blz. $ 2,95.

Dit boek is bestemd om te gebruiken naast 'Calculus, One and Several Variables' van Salas en Hille. (zie de bespreking in Euclides 54e jrg 1978/1979 nr. 8. bl. 324). Ieder hoofdstuk begint met een korte samenvatting van de betreffende stof uit het genoemde leerboek: een overzicht van de theorie, definities, stellingen. Vervolgens geeft de schrijver de oplossing van een aantal vraagstukken uit de tekst van Salas en Hille. Daarna volgen opgeloste vraagstukken uit diverse toepassingsgebieden: economie, handelswetenschappen, sociale wetenschappen. Aan het eind van elk hoofdstuk een aantal zg. 'Additional exercises' ter oplossing door de student. De antwoorden op deze laatste vraagstukken zijn achterin het boek opgenomen.
Het gehele werk maakt een zeer verzorgde indruk.
De oplossingen van de vraagstukken zijn alle uiterst zorgvuldig en zeer helder beschreven. Het boek is naar mijn mening een zeer waardevolle aanvulling op de genoemde werken waarbij het geschreven is.

W. Kleijne.

Mededelingen

Zesde gemeenschappelijke studiedag van NVvW en VVWL

Op *28 maart* a.s. houden de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren hun zesde gemeenschappelijke studiedag.

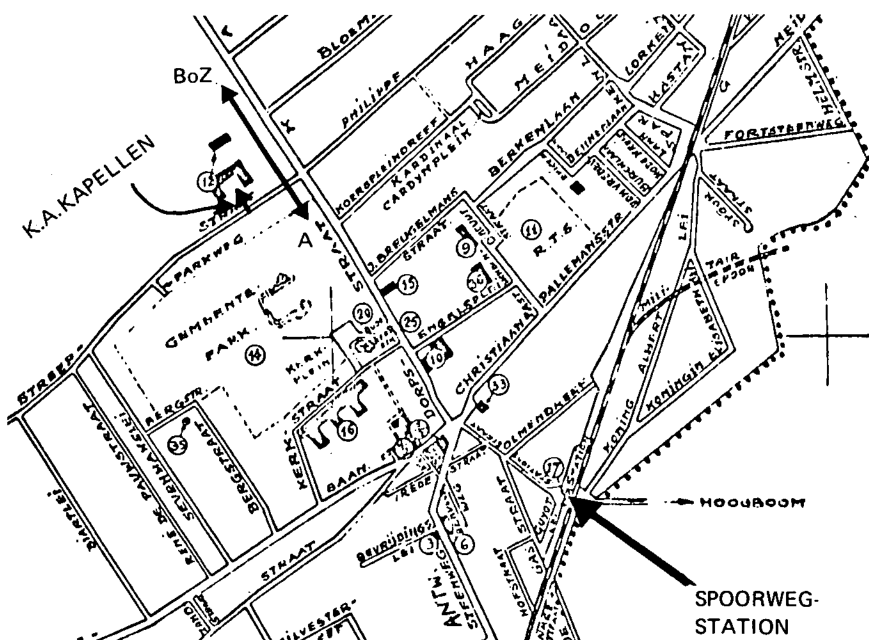
Plaats van samenkomst: het Koninklijk Atheneum Kapellen, adres Streepstraat 2, Kapellen.

Thema: De geschiedenis van de wiskunde en het onderwijs

Agenda

vanaf 10.00	ontvangst van de deelnemers
10.30	opening door de voorzitters van de beide verenigingen (Frank Laforce en Theo Korthagen)
10.45	Prof. Dr. H. J. A. Duparc (TH Delft) spreekt over: Geschiedenis van de wiskunde en onderwijs in de wiskunde
12.30	lunch
14.00	Prof. Dr. G. Hirsch (Vrije Universiteit Brussel en Université Libre de Bruxelles) spreekt over: De rol van de geschiedenis van de wiskunde in het wiskundeonderwijs
15.15	rondvraag
16.00	sluiting

De kosten voor de (warme) lunch bedragen *f* 15,–. Wilt u dit bedrag voor 15 maart overmaken op girorekening 143917 t.n.v. de NVvW te Amsterdam?



Kapellen is bereikbaar per auto vanaf Bergen op Zoom of vanaf de E-10, dichtbij Antwerpen de

afslag naar Bergen op Zoom kiezen. De weg Bergen op Zoom-Antwerpen loopt door Kapellen en is op bijgaande kaart aangegeven door een dubbele pijl met bijschrift BoZ en A.
Treinreizigers nemen de trein van 9.12 uur uit Roosendaal, aankomst Essen 9.20 uur. Daar overstappen. Vertrek Essen 9.30 uur, aankomst Kapellen 9.48 uur. De weg van het station naar het Atheneum kunnen ze op de kaart vinden.

We vragen u dringend door uw aanwezigheid bij te dragen aan de goede contacten met onze zuiderburen.

Bestuur NVvW

Kolleges sterrekunde voor afgestudeerden, 1981

Deze kolleges behandelen in 1981 het onderwerp

NAUWE DUBBELSTERREN

Ze vinden plaats op donderdagavonden van 19.30 tot 21.15 uur in de Sterrewacht te Utrecht, Zonnenburg 2 (stadsbus: lijn 2 van het station, uitstappen halte Agnietenstraat).

Onderwerpen:
5 maart: Prof. dr. C. de Jager: Nauwe dubbelsterren; inleiding en probleemstelling
12 maart: dr. J. R. W. Heintze: Algolsterren
19 maart: dr. G. J. Savonije: de evolutie van nauwe dubbelsterren, cataclysme-veranderlijken
26 maart: Prof. dr. E. P. J. van den Heuvel: Röntgendubbelsterren

Toelichting:
In nauwe dubbelsterren staan de komponenten zo dicht bij elkaar dat massa-uitwisseling kan optreden: de evolutie van de sterren is daardoor niet meer onafhankelijk van elkaar. Bovendien heeft materie uitwisseling bijzondere effekten ten gevolge, zoals de vorming van een heet gas (uitzending van röntgenstraling) of zelfs explosieve verschijnselen (novae).

De voordrachten zijn voor ieder toegankelijk met voorkeur voor afgestudeerden. Om een overzicht te krijgen over de te verwachten deelneming wordt men wel verzocht zijn/haar komst van te voren aan te melden bij het sekretariaat van de Sterrewacht (Zonnenburg 2, 3512 NL UTRECHT; tel. 030-31 28 41).

C. de Jager

17e Nederlands Mathematisch Congres

Datum: Woensdag 15 april en donderdag 16 april 1981.

Plaats
15 april: Wiskundegebouw van de Universiteit van Amsterdam, Roetersstraat 15, Amsterdam.
16 april: Mathematisch Centrum, Kruislaan 413, Amsterdam.

Openingsvoordracht
Prof. Dr W. T. van Est: 'Foliaties, een grensgebied tussen analyse en topologie'.

Slotvoordracht
Prof. Dr J. F. A. K. van Benthem, (Onderwerp uit de logica en grondslagen).

Programma

Dit congres staat voor een deel in het teken van de 100e geboortedag van Prof. Dr L. E. J. Brouwer. Op de middag van de 15e april wordt de Brouwer Memorial Lecture gehouden door Prof. Dr H. Kesten (waarschijnlijkheidsrekening en statistiek), gevolgd door een receptie. Voorts zijn vier secties, resp. werkgemeenschappen uitgenodigd een gedeelte van het programma voor hun rekening te nemen, te weten

1) algebra, meetkunde, topologie
2) theoretische analyse
3) toegepaste analyse
4) didaktiek.

Kosten

Het congresgeld bedraagt *f* 10,— voor leden van het Wiskundig Genootschap; *f* 20,— voor niet-leden; nihil voor studenten. De lunches zijn als volgt geprijsd: 15 april *f* 12,50; 16 april *f* 10,—. U kunt zich opgeven als deelnemer bij ondergetekende (onder gelijktijdige overmaking van de kosten op girorekening 1667577 ten name van de Penningmeester van het Nederlands Mathematisch Congres te Amsterdam). Men kan dit doen onder opgave van: Naam, Adres (bij voorkeur werkadres), Instituut, Telefoon, Vermelding van de te maken kosten, dit alles vóór 1 maart 1981.

Korte voordrachten

De congrescommissie nodigt uit tot actieve deelname aan het congres door het houden van een korte voordracht (25 min.). Deze voordrachten zullen voorlopig ingedeeld worden in de volgende secties: analyse/funktionaalanalyse, algebra/algebraïsche meetkunde, topologie/meetkunde, discrete wiskunde, getaltheorie, kanstheorie, statistiek, besliskunde/operations research, mathematische fysica/toegepaste analyse, numerieke wiskunde, informatica, logica/grondslagen der wiskunde, geschiedenis der wiskunde, didaktiek der wiskunde.

Aanmelding eveneens bij ondergetekende, vóór 1 maart 1981, met vermelding van sectie en gewenste hulpmiddelen (bord, overheadprojector, etc.), en onder bijvoeging van een samenvatting van de voordracht. Voorgeschreven omvang van deze samenvatting is één pagina A4-formaat, getypt met $1\frac{1}{2}$-regelafstand en een marge aan alle zijden van 3 cm. De standaardvorm van de kop van de samenvatting is als volgt:

⟨ TITEL IN HOOFDLETTERS ⟩

⟨ naam spreker ⟩ , ⟨ instituut van herkomst ⟩.

De samenvattingen zullen iets verkleind in het congresboekje worden afgedrukt.

Nadere gegevens volgen in de komende nummers van de Mededelingen van het Wiskundig Genootschap.

De secretaris van de congrescommissie
Dr R. W. van der Waall,
Mathematisch Instituut,
Universiteit van Amsterdam,
Roetersstraat 15,
1018 WB Amsterdam
telefoon 020-5 22 23 74.

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1979 - 31 juli 1980.

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester drs. J. van Dormolen, overige leden L. Bozuwa, F. F. J. Gaillard, C. Th. J. Hoogsteder, M. Kindt, F. J. Mahieu en mw. drs. N. C. Verhoef.

Op 22 september vond te 's-Hertogenbosch een gemeenschappelijke bestuursvergadering plaats van de besturen van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en op 22 maart was er een gemeenschappelijke studiedag voor de leden van beide verenigingen in het Koninklijke Atheneum te Berchem (Antwerpen) met als thema 'Hoeken, een hoeksteen van de meetkunde'. R. Verhulst en J. van Dormolen hielden hier inleidingen, getiteld: 'Brengen we de hoeken soms niet om het hoekje' en 'Hoeken, een steen des aanstoots'.
Vlaamse bestuursleden waren aanwezig op de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en Nederlandse bestuursleden waren aanwezig op de jaarvergadering van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars.

De jaarvergadering is gehouden in het gebouw van de SOL te Utrecht op zaterdag 27 oktober. Deze jaarvergadering was gecombineerd met een studiedag, verzorgd door de didactiekcommissie, met als centraal thema 'Het zijn de kleine dingen die het 'm doen'. Na een inleiding door H. Broekman bestond voor de leden de mogelijkheid deel te nemen aan een themagroep met als onderwerp:
- Het teruggeven en bespreken van een proefwerk o.l.v. mw. F. Meester en J. Vedder,
- Blikwisseling o.l.v. G. Doevedans en J. van Dormolen,
- De geodriehoek o.l.v. B. Knip en G. Schoemaker,
- Merkwaardige producten en ontbinden in factoren o.l.v. C. Hollman en H. Pouw,
- Kleine redeneringen o.l.v. H. Broekman en L. Muskens.

Ook was er een lezing door J. Hogendijk met als titel 'Twee vertellingen over pi'. Het mei-nummer van Euclides was als 'special' geheel aan deze dag gewijd. Door de aanwezige leden (149 tekenden de presentielijst) werd deze dag met veel animo gewerkt.
Regionale bijeenkomsten ter bespreking van de eindexamens wiskunde werden op 9 mei gehouden in 6 plaatsen voor vwo (wiskunde I) en havo, op 12 mei in 18 plaatsen voor mavo-4 en op 6 plaatsen voor lto-c/mavo-3 en op 13 mei in 4 plaatsen voor lbo-c. Op 12 mei werd te Utrecht een centrale bijeenkomst gehouden voor wiskunde II-vwo.
Dit verenigingsjaar is een 'Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde' geformeerd, dat zich onder andere tot doel stelt de A, B en C-cursussen te continueren. In dit werkverband wordt deelgenomen door:
- De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren,
- Het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (I.O.W.O.),
- De Wiskunde-afdelingen van de Nieuwe Leraren Opleidingen,
- De Wiskunde-afdelingen van de Universitaire Leraren Opleidingen.

Dit werkverband heeft op 6, 7 en 8 maart een B-cursus en op 27, 28 en 29 maart een C-cursus georganiseerd.
In de loop van het jaar is het werkverband nog uitgebreid met:
- De Wiskunde-afdeling van de Stichting Leerplan Ontwikkeling (S.L.O.) en
- De M.O.-overlegraad.

Op 16 februari heeft het bestuur een brief aan de leden van de Vaste Commissie voor Onderwijs en Wetenschappen van de 2e Kamer der Staten Generaal gezonden waarin een beroep gedaan werd om mede te werken aan het behoud van het I.O.W.O.
Op 24 maart richtte het bestuur zich tot de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen met het verzoek zo snel mogelijk de mogelijkheid te bieden op een aantal scholen met aangepaste eindexamens, zoals voorgesteld in het HEWET-rapport, te experimenteren en te bevorderen dat zo snel mogelijk met de nascholing begonnen wordt, die in dit rapport wordt voorgesteld.
In de jaarrede sprak de voorzitter: 'Tot nu toe bestond het centraal schriftelijk examen wiskunde voor mavo (en ook voor het lbo) uit twee zittingen, één met meerkeuze-vragen en één waar open vragen moeten worden beantwoord. De Staatssecretaris heeft besloten dit aantal zittingen binnen enkele jaren tot één terug te brengen. Het is nog niet bekend hoe het examen er dan gaat uitzien, uitsluitend meerkeuze-vragen of een mengvorm. De Staatssecretaris zal zich in deze kwestie door verschillende instanties laten adviseren.' Definitieve mededelingen van het ministerie zijn nog niet ontvangen. Het bestuur heeft een werkgroep ingesteld die de opdracht heeft om onder leiding van F. J. Mahieu een advies samen te stellen over de doelstellingen van het mavo- en lto-c-examen en de gewenste vorm van dit examen.
Het bestuur vergaderde dit jaar 10 maal, waarvan éénmaal met de inspecteurs drs. W. de Jong, P. Lafeber, drs. B. J. Westerhof en N. J. Zimmerman.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUD:

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

S. H. Cheng, Akkerstraat 28, 5615 HR Eindhoven.

J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht.

Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld.

A. H. Syswerda, Colenbranderstraat 10, 6813 KW Arnhem.

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Joh. H. Wansink, Julianalaan 84, 6824 KJ Arnhem.